

图论及其应用
习题解答

张克民 林国宁 张忠辅



清华大学出版社

内 容 提 要

该书摘要编译 J.A.Bondy 和 U.S.R.Murty 所著"Graph Theory with Applications"一书的主要内容，并对其全部习题作了解答。此外，还补充了少量其它习题与解答。

该书可作为图论的教学和自学参考书。

图论及其应用习题解答

张克民　林国宁　张忠辅

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京通县向阳印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/32　印张：10　字数：223千字

1988 年 4 月第 1 版　1988年 4 月第 1 次印刷

印数：00001—12000　　　定价：1.45元

ISBN 7-302-00016-6/O·1(课)

前　言

图论是研究离散对象二元关系系统中关系结构的一个数学分支。它与拓朴学、代数学、组合数学等学科关系极为密切。其应用也极为广泛，已经渗透到物理学、化学、电子学、生物学、运筹学、经济学、系统工程以及计算机科学等学科领域。基于上述原因，引起了越来越多的人对图论的兴趣与重视。

目前，国内不少学校有关专业先后开设了图论课程，图论的中文书籍也出版了近十种。由于这一学科本身的特殊性，图论习题在该学科的学习中占有重要地位。因而，几乎每本图论书都精心地安排了大量的习题。这些习题不但是书中内容的扩充，也是启发诱导初学者掌握图论方法和技巧的重要组成部分。为了与学习图论的读者共同切磋图论的解题方法，我们编写了本题解，并想尽力做到使本书对图论教学人员及其它有关人员有一定的参考价值。

J.A.Bondy 和 U.S.R.Murty 著的《Graph Theory with Applications》是一本较好的图论入门书。它精选了内容广泛、难度不同的327道习题，其中有些习题对图论的进一步学习是应当掌握的。本题解依序将该书的重要内容摘要列出，并将全部习题一一解出。本书采用的术语、符号尽量与该书一致，且对书中个别题目的疏忽或欠妥之处，题解中都一一作了补充或修改。一道题的解法常常不只一种，一

般情况下，我们仅选择一种解法。主观上是以图论意义比较清晰、逻辑推理比较简捷，读者易于阅读为取舍标准。算法方面的习题，不考虑它在计算机上如何实现，而只是用图论的语言与符号写出它的粗略的计算步骤。至于算法框图，因篇幅关系全部从略。读者自已补出不无裨益。

除上述书的习题外，为了加深理解并扩大视野，我们参考了李修睦先生著的《图论导引》、卢开澄同志著的《图论及其应用》等国内流行的几种图论书籍及一些文献资料，增添了一些习题.此外还对一些问题作了注释，目的是为了说明该问题的进展情况和指出进一步阅读的参考文献。但限于篇幅，这些增补是极少量的，又限于水平，难免挂一漏万。

这本书是我们在几年的教学过程中，几经修改、逐步完成的。在编写过程中，我们得到许多同志的帮助。特别要提到的是新疆大学张福基同志与华中师范学院毛经中同志，他们对本书提供了许多宝贵的修改意见。谨此一并致谢。

限于我们学识浅陋，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编者

目　录

第一章　图与子图

1.1　图与单图

定义：图G是有序三元组$(V(G),E(G),\psi_G)$，其中$V(G)$是**顶点**非空集合，$E(G)$是和$V(G)$不相交的**边集合**，ψ_G则是联系着G中的边和一对无序顶点(可以相同)之间的关联函数。若e是G中的一条边，而u和v是G中的顶点，满足$\psi_G(e)=uv$，则称e是**连接**u和v的，u及v和e**相关联**，顶点u和v称为e的**端点**。

定义：**可平面图**。图G若存在一个平面图形，它们的边仅相交于端点，则称G为可平面图。反之称为**非可平面图**。

定义：和一条公共边相关联的两顶点称为**相邻**，和一个公共顶点相关联的两边称为**边相邻**。

定义：具有同一端点的边称为**环**，不同端点的边则称为**杆**。

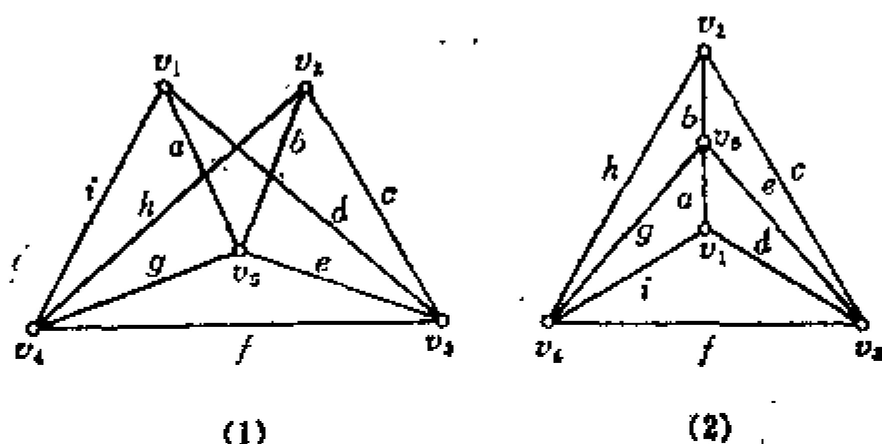
定义：若G是一个无环且不存在两个顶点连接二条杆的图，则称G为**单图**。

定义：$\nu(G)$，简记ν，表示图G的顶点数；$\varepsilon(G)$，简记ε，表示图G的边数。

1.1.1 从日常生活中列举五个例子，在这些例子中，图的概念的导出是自然的。

解：若$V(G)$表中国的城市集合，$E(G)$表城市间的道路集合，若e是u城到v城的道路，ψ_G则代表$\psi_G(e)=uv$这种关联函数全体，所成之图G是中国国内的交通图。类似地，可定义国内的通讯网络图，某城居民的亲属关系图，球赛中的比赛关系图，图书馆的藏书分类图等。

1.1.2 将1.1.2(1)图画成一个不同的图形以说明该图是可平面图。



1.1.2 图

解：其图形如1.1.2(b)图。

1.1.3 若G是单图，证明$\varepsilon\leqslant\binom{v}{2}$。

证：因G是单图，无环且无重边，任二顶点至多有一条边，故$\varepsilon\leqslant\binom{v}{2}$。

1.1.4 有序三元组(V, E, ψ_G)是图，当且仅当存在有序二元组(V, E')，其中E'是V的二元子集簇(这里的二元子集允许两个元是相同的，且子集簇中的子集可以重复)。

证：⇒：$G=(V, E, \psi_G)$是图，则对任意$e\in E$，$\exists u$，$v\in V$使得$\psi_G(e)=uv$，令$E'=\{(u,v)\mid\psi_G(e)=uv, e\in E\}$。

E'是V的二元子集族。

$\Leftarrow$：设E'是V的二元子集族，令

$E=\{e=uv \mid (u, v)\in E'\}$且对任意$e\in E$作关联函数$\psi_G$：$\psi_G(e)=uv$，这里$u$，$v$满足$uv=e$。显然这样由$(V,E')$确定的三元组$(V, E, \psi_G)$是图。

（本题说明图也可定义为有序二元组(V, E')，其中E'是V的二元子集族，E'中的元素称为图的边。图的这种定义稍加推广即得超图的概念。）

1.1.5 **超图**H是有序二元组$(V(H), E(H))$，其中$V(H)$是顶点非空有限集合，$E(H)$是$V(H)$的非空子集族，且$\bigcup_{E_i\in E(H)} E_i=V(H)$。$E(H)$中的元素$E_i$称为超图的边，没有相同边的超图称为**单超图**。

证明：若H是单超图，则$\varepsilon\leqslant 2^{\nu}-1$，其中$\nu$，$\varepsilon$分别是$H$的顶点数与边数。

证：因H是单超图，$V(H)$的每一个非空子集至多是$E(H)$的一个元素，而$V(H)$的一切非空子集的数目是：

$$\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\cdots+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}-1$$ 故$\varepsilon\leqslant 2^{\nu}-1$。

1.1.6 若超图的每一条边中的顶点数目均为k，则称为**k—一致超图**。

证明2—一致单超图是无孤立点的单图。

证：2—一致超图的每一边均是二元的，因而由练习[1.1.4]，它是图且每一边均是杆。又因是单超图，故无重边，所以是单图。又依定义，超图的每一顶点至少属于一条边，故此图无孤立点。

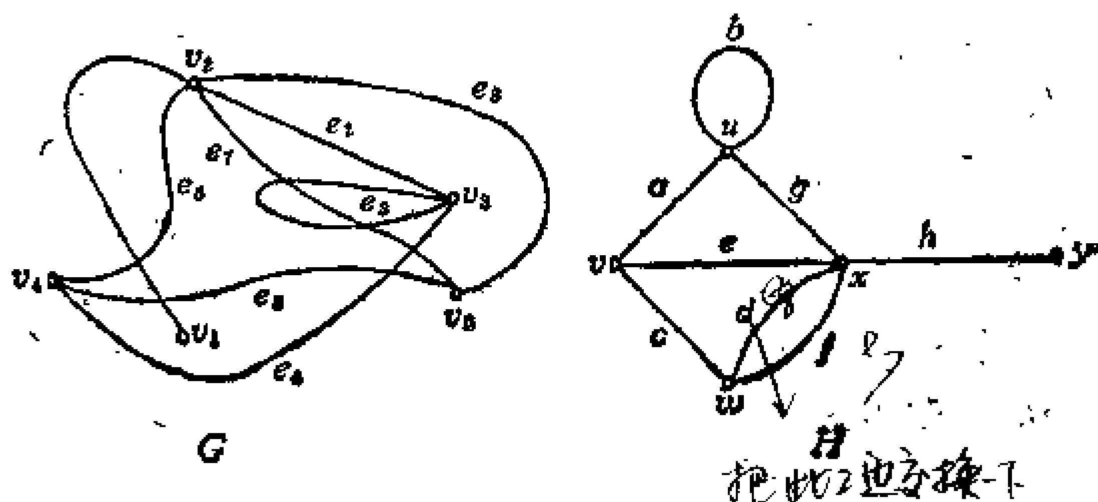
（关于超图理论，可参阅C. Berge著《Graphs and Hypergraphs》(1973)及李慰萱著《图论》第九章(1980)）。

1.2 图的同构

定义：若图 $G=(V(G),\ E(G),\psi_G)$ 和图 $H=(V(H),\ E(H),\ \psi_H)$ 之间满足 $V(G)=V(H)$，$E(G)=E(H)$ 和 $\psi_G=\psi_H$，则称图 G 和图 H 恒等，记为 $G=H$。

定义：若图 $G=(V(G),\ E(G),\psi_G)$ 和图 $H=(V(H),\ E(H),\ \psi_H)$ 之间存在一个双方单值的映射偶 $(\theta,\ \phi)$，满足 $\theta: V(G)\to V(H)$，及 $\phi: E(G)\to E(H)$，且 $\psi_G=uv \Longleftrightarrow \psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$。则称图 G 和 H 同构，记为 $G\cong H$。

1.2.1 在图 G 和图 H 间找寻一个同构映射。



1.2.1 图

解：由同构定义，同构映射下对应点关联边的种类(杆或环)和数目应保持不变。若 G,H 间存在另一双方单值映射偶 $(\theta_1,\ \phi_1)$，则 $\theta_1(v_1)=y$，$\theta_1(v_2=x$，$\theta_1(v_3)=u$。同样由同构定义，两相邻顶点间的关联边数保持不变，从而我们有 $\theta_1(v_4)=v$，$\theta_1(v_5)=w$，所以 $\theta_1=\theta$ （$(\theta,\ \phi)$ 是已给的映

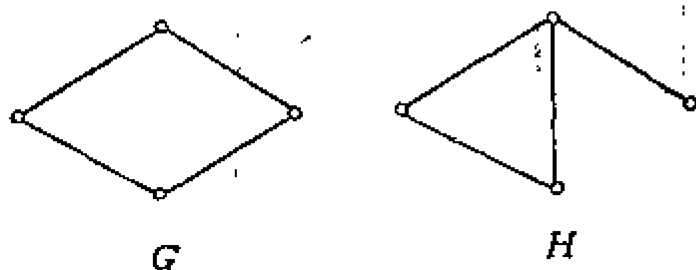
射偶）。进而我们定义ϕ_1如下：除$\phi_1(e_7)=f$，$\phi_1(e_8)=d$与ϕ不同外，其它与ϕ一样。(θ_1, ϕ_1)是异于(θ, ϕ)的一个双方单值映射偶。易由同构定义验证，图G和H之间只有这两个相异的同构映射。

1.2.2 (*a*) 若$G\cong H$，则$\nu(G)=\nu(H)$，$\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$。

(*b*) 给出一个例子说明(*a*)的逆不真。

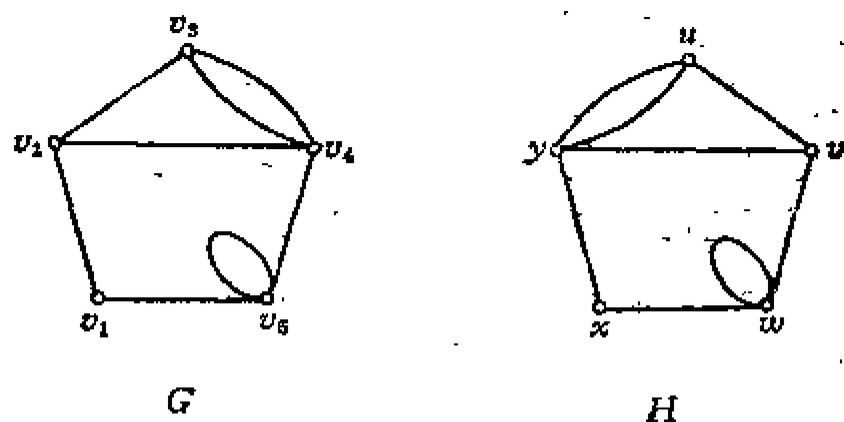
证：(*a*) 由同构定义中的θ与ϕ都是一一对应映射，结论显然。

(*b*) 如图中G和H，显然$\nu(G)=4=\nu(H)$，$\varepsilon(G)=4=\varepsilon(H)$，但$G$和$H$不同构。



1.2.2 (*b*) 图

1.2.3 证明下面的图不同构。



1.2.3 图

证：因为G中有环的顶点v[illegible]与关联重边的顶点v_4相邻。但H不是这样，故G与H不同构。

1.2.4 证明有11个不同构的四个顶点单图。

证：

$\varepsilon=0$	1	2	3	4	5	6

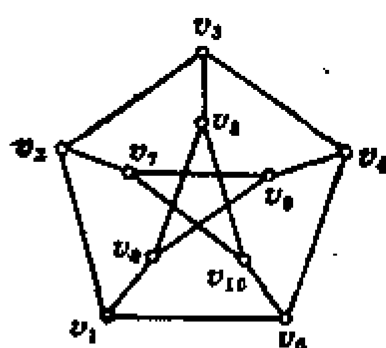
对四个顶点的单图G，由练习1.1.3知$\varepsilon(G)\leqslant\binom{4}{2}=6$，从而上面已穷举了四个顶点的一切可能的单图。其总数恰为11个。

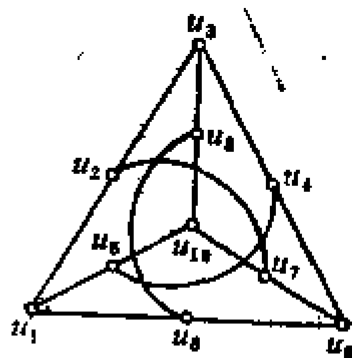
1.2.5 证明：两个单图G和H同构的充要条件是存在双方单值映射θ：$V(G)\to V(H)$，使得$uv\in E(G)$的充要条件是$\theta(u)\theta(v)\in E(H)$。

证：由同构的定义，必要性是显然的。下面证明其充分性，首先由θ定义ϕ：$E(G)\to E(H)$如下：$uv\in E(G)$和$\theta(u)\theta(v)\in E(H)$对应，由于$G$和$H$均是单图，从而$\phi$是双方单值映射，且有$\psi_G(e)=uv$的充要条件为$\psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$，从而按定义$G\cong H$。

1.2.6 证明下面两图是同构的。

证：将图G和H顶点编号如图，令θ：$\theta(v_i)=u_i$ （i=





1.2.6 图

1, 2, …, 10), 显然 θ 是 $V(G)\to V(H)$ 上是双方单值映射, 易直接验证 $v_iv_j\in E(G)$ 的充要条件是 $u_iu_j=\theta(v_i)\theta(v_j)\in E(H)$, 从而由练习1.2.5知, $G\cong H$.

1.2.7 设 G 是单图, 证明 $\varepsilon=\binom{\nu}{2}$ 成立的充要条件是 G 为完全图.

证: 其充分性是显然的. 现证明其必要性, 由于完全图 K_ν 的 $\varepsilon(K_\nu)=\binom{\nu}{2}$, 从而不是完全图且又要满足 $\varepsilon=\binom{\nu}{2}$ 的图 G, 必包含多重边或环, 但这又与 G 是单图的假定矛盾. 故 G 是完全图.

1.2.8 证明: (a) $\varepsilon(K_{m,n})=mn$;

(b) 若 G 是二部的单图, 则 $\varepsilon\leqslant\nu^2/4$.

证: (a)显然.

(b) 若 G 的一部分是 m 个顶点, 则 $\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(K_{\nu-m,m})=(\nu-m)\cdot m=\nu m-m^2=\nu^2/4-(\nu/2-m)^2\leqslant\nu^2/4$.

1.2.9 **k-部图**是其顶点集合能划分成 k 个子集合, 且没有一条边其两端点都在同一子集合中的图; **完全k-部图**是一个 k-部单图, 且它的不在同一子集中的每对顶点均存在边相

连。n个顶点的完全m-部图，若其中每一部为$[n/m]$个或为$\{n/m\}$个顶点时，记为$T_{m,n}$。证明：(a) $\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}$，其中$k=[n/m]$；

(b) 如果G是n个顶点的完全m-部图，则$\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(T_{m,n})$，且只有在$G\cong T_{m,n}$时等号成立。

证： (a) 因为令$n=mk+r$，$0\leqslant r<m$时，则由$T_{m,n}$定义有

$\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n}{2}-r\binom{k+1}{2}-(m-r)\binom{k}{2}$。用$r=n-mk$代入化简整理即得结论。

(b) 设完全m-部图G的m个部分的顶点数分别为：n_1，n_2，…，n_m；若G不同构$T_{m,n}$，则存在$n_i-n_j>1$；考虑如下的完全m-部图G'，它的m部分的顶点数分别为：n_1，n_2，…，n_i-1，…，n_j+1，…，n_m。由于$\varepsilon(G)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(n-n_k)n_k$，$\varepsilon(G')=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\ \neq i,j}}^{m}(n-n_k)n_k+\frac{1}{2}(n-n_i+1)(n_i-1)+\frac{1}{2}(n-n_j-1)(n_j+1)=\varepsilon(G)+(n_i-n_j)-1>\varepsilon(G)$。若$G'\cong T_{m,n}$则(b)结论已成立，若$G'$不同构$T_{m,n}$，则上述过程可继续进行，直到对一切$i$，$j$，$|n_i-n_j|\leqslant 1$为止，这时所得的图恰为$T_{m,n}$，注意到在这过程中产生的新图的边数在逐渐增大，直至$\varepsilon(T_{m,n})$为止，故(b)成立。

1.2.10 **k-方体图**是其顶点为0与1的有序k元组，当且仅当它们的一个坐标不相同时，此两个顶点相连以边。证明k-方体图是有2^k个顶点$k2^{k-1}$条边的2-部图。

证：按定义k-方体图中顶点与分量取值0和1的k维向量一一对应；而后者恰为2^k个，从而k-方体图有2^k个顶点。另外在这k维向量中，固定$k-1$个坐标后，恰恰在k-方体中，对应两个顶点，且这两顶点按定义应连以一条边，故k-方体有$C(^k_{k-1})2^{k-1}=k2^{k-1}$条边。最后我们按每个顶点的坐标和的奇偶性，将$k$-方体图的顶点分成两部分，显然由$k$-方体图边的定义，每一部分中的顶点相互没有边相连。故k-方体图是2-部图。

1.2.11 (a)单图G的**补图**G^c是顶点集为$V(G)$的单图，两个顶点在G^c中相邻的充要条件是它们在G中不相邻．K^c_n，$K^c_{m,n}$是怎样的图？

(b) 如果单图G满足$G\cong G^c$，则称G为**自补**的。证明：若G是自补的，则$\nu(G)\equiv 0$或$1 \pmod 4$。

证：(a) K^c_n为几个顶点的空图。$K^c_{m,n}$则为K_m和K_n的并。

(b) 由G^c定义，我们有$\varepsilon(G)+\varepsilon(G^c)=\varepsilon(K_\nu)=\binom{\nu}{2}=\nu(\nu-1)/2$，由于$G\cong G^c$，从而$\varepsilon(G)=\varepsilon(G^c)$，所以$\varepsilon(G)=\nu(\nu-1)/4$为整数，又因为$\nu$，$\nu-1$间有一为奇数，从而只能$\nu\equiv 0, 1 \pmod 4$。

1.2.12 图的**自同构**是图到自身的一个同构。

(a) 用练习1.2.5证明：单图G的自同构可以看成是在$V(G)$上保持相邻性的一个置换，且这种置换的集合在通常置换的乘法运算下构成群$\Gamma(G)$(称为G的**自同构群**)。

(b) 求$\Gamma(K_n)$和$\Gamma(K_{m,n})$。

(c) 求一个自同构群为唯一么元的非平凡单图。

(d) 证明对于任意单图G有$\Gamma(G)=\Gamma(G^c)$。

(*e*) 考虑元素为(1)(2)(3)，(1，2，3)和(1，3，2)构成的置换群A。证明不存在顶点集为{1，2，3}的单图G使得$\Gamma(G)=A$。

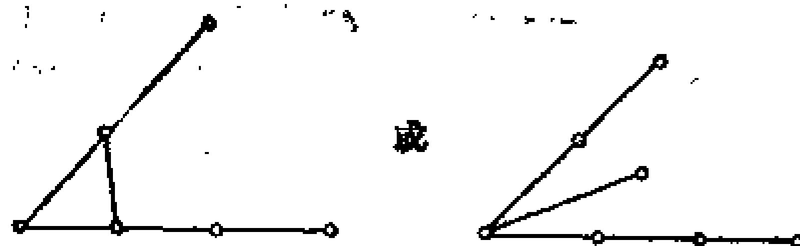
(*f*) 求一个单图使得$\Gamma(G)\cong A$。(R.Frucht.1939年已证明，每一个抽象群都同构于某些图的自同构群)。

证：(*a*) 将练习1.2.5中的H换成G，于是由练习1.2.5，(*a*)的前半部分的结论是显然的．再应用练习1.2.5的结论，易证G的两自同构对应的置换的乘积，仍为G上的自同构所对应的置换，G的自同构对应的置换的逆置换，仍为G上的自同构所对应的置换，从而由子群的定义和性质，G上自同构所对应的置换所成的集合，在通常的置换乘法运算下构成群$\Gamma(G)$。

(*b*) $\Gamma(K_n)=S_n$(n阶对称群)；

$\Gamma(K_{m,n})=S_m+S_n$。

(*c*)

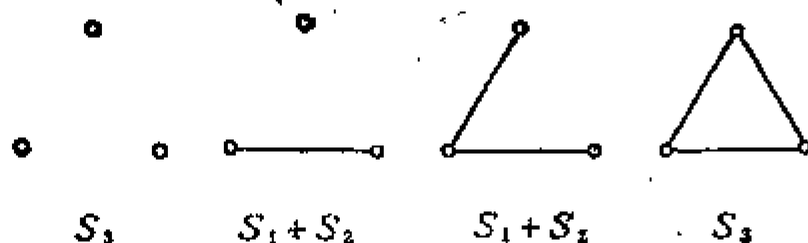


1.2.12(*c*) 图

(*d*) 由练习1.2.5知，若θ是G上的自同构对应的置换，即θ：$V(G)\to V(G)$，使得$uv\in E(G)$的充要条件是$\theta(u)\theta(v)\in E(G)$。我们也可以叙述成$\theta$：$V(G)\to V(G)$，使得$uv\notin E(G)$的充要条件是$\theta(u)\theta(v)\notin E(G)$。我们再将它在$G^c$上来叙述，于是有$\theta$：$V(G^c)\to V(G^c)$使得$uv\in E(G^c)$

的充要条件是 $\theta(u)\theta(v)\in E(G^c)$。从而 θ 亦是 G^c 上的自同构。类似地可证 G^c 上的自同构也是 G 上的自同构，所以 $\Gamma(G)=\Gamma(G^c)$。

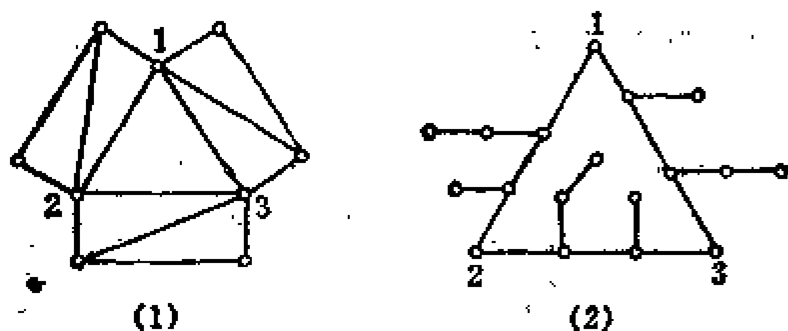
(*e*) 用穷举来加以证明。对顶点集为{1,2,3}的单图 G 一共仅有四个，它们及所对应的自同构群如下：



1.2.12 (*e*) 图

都与 A 不同，从而结论成立。

(*f*) 下列两图均可直接验证 $\Gamma(G)=A$。(可以证明图(1)是满足 $\Gamma(G)=A$ 的顶点数最小的单图。证明见 F.Harary and E.M.Palmer, Czech.Math.J.16(1966),70～71.)



1.2.12 (*f*) 图

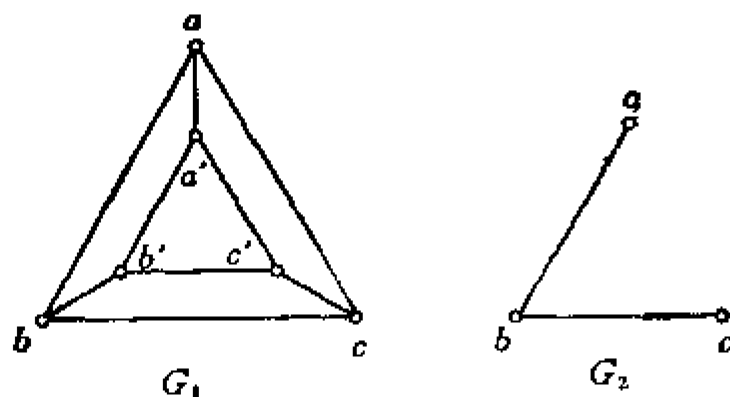
1.2.13 单图 G 称为**顶点传递图**，若对于任两个顶点

和 v，在$\Gamma(G)$中有元素 g 使得 $g(u)=v$；G 称为**边传递图**：若对于任意两条边 u_1v_1 和 u_2v_2 在$\Gamma(G)$ 中有元素 h 使得 $h(\{u_1, v_1\})=\{u_2, v_2\}$。求一个图满足：

(a) 它是顶点传递的但不是边传递的。

(b) 它是边传递的但不是顶点传递的。

解：见图。



1.2.13 图

(a) 图中 G_1 即为所求。易直接验证 G_1 是顶点传递的，但不存在自同构变换，将边 aa' 变成边 ab，这可以从边aa'的顶点 a' 的另外两个相邻顶点 b'、c' 和a' 构成一个三角形，而边 ab 中无论是 a 或 b 点均无此性质 得证 G_1 不是边传递的。

(b) 图中 G_2 即为所求。易直接验证 G_2 是边传递的，但由于 a 的邻点个数为 1，b 的邻点个数为 2，而同构下的对应点的邻点个数应相等，所以不存在自同构将 a 变成 b，故 G_2 不是顶点传递的。

(传递图的有关知识可参阅 N. L. Biggs 著的《Algebraic Graph Theory》(1974)第 3 部分)。

1.3 邻接矩阵和关联矩阵

定义：邻接矩阵 $A(G)=[a_{ij}]_{\nu\times\nu}$，其中 a_{ij} 是连接顶点 v_i 和 v_j 的边数。

定义：关联矩阵 $M(G)=[m_{ij}]_{\nu\times\varepsilon}$，其中 m_{ij} 是顶点 v_i 和边 e_j 的关联次数(0，1或2)。

1.3.1 设M是图 G 的关联矩阵，而 A 是图G的邻接矩阵。

(*a*) 证明 M 的列和为 2。

(*b*) A 的列和是多少？

证：(*a*)按 M 的定义，它的第 j 列是对应e_j 和$V(G)$中顶点的关联次数所成的向量，由于一条边只有二个端点，故 M 的列和为 2。

(*b*)根据定义，A 的第 i 列的列和恰为与 v_i 关联的边的数目。

1.3.2 设 G为 2-部图，证明 G 的顶点可编号使得 G 的邻接矩阵具有如下形状：

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & A_{12} \\ \hline A_{21} & 0 \end{array}\right] \qquad \text{其中 } A_{21} \text{ 是 } A_{12} \text{ 的转置}$$

证：由于 G 是 2-部图，故 $V(G)$可划分成二部分 V_1和 V_2，V_1、V_2 两部顶点之间没有边相连。先对 V_1 编号，编完后，再对 V_2 编号。这时 $A(G)$具有上述形状，又 A 为对称矩阵，故 A_{21} 是 A_{12} 的转置。

1.3.3 证明：若 G 是单图，$A(G)$的特征值均相异，

则 $\Gamma(G)$是 Abel 群。

证：G 的一个自同构对应一个置换矩阵 P，且 $PAP'=A$，即 $PA=AP(\because P'=P^{-1})$。设 X 是 A 的特征值 λ 对应的特征矢量，从而有 $PAX=APX$，因为 $PAX=\lambda PX$，所以 $APX=\lambda PX$，即 PX 亦是 A 的 λ 所对应的特征矢量。由于 A 的特征值均相异，从而他们对应的特征矢量均相异且正交，所以 $PX=\mu X$。于是若我们取 A 的所有特征值所对应的特征矢量作为空间的正交基底时，则 P 在这基底下化成对角阵 $\bar{P}$，即存在满秩方阵 T，对于任意的 G 中的自同构的置换矩阵 P 成立 $TPT^{-1}=\bar{P}$，即 $T^{-1}\bar{P}T=P$。设 P_i，P_j 是 G 中任意两个自同构的置换矩阵，于是 $P_iP_j=(T^{-1}\bar{P}_iT)(T^{-1}\bar{P}_jT)=T^{-1}\bar{P}_i\bar{P}_jT=T^{-1}\bar{P}_j\bar{P}_iT=(T^{-1}\bar{P}_jT)(T^{-1}\bar{P}_iT)=P_jP_i$。所以$G$的任意两个自同构的置换矩阵可交换，故 $\Gamma(G)$是 Abel 群。

1.3.4 图 G 的邻接矩阵 $A(G)$的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\lambda^{\nu}+C_1\lambda^{\nu-1}+C_2\lambda^{\nu-2}+C_3\lambda^{\nu-3}+\cdots+C_{\nu}$$

(其中 I 是单位方阵)称为图 G 的**特征多项式**。$A(G)$的特征值及其重数称为图 G 的**谱**。

证明，若 G 是单图，则有：

(a) $C_1=0$，(b) $-C_2=\varepsilon(G)$，(c) $-C_3$是 G 中含有不同的 K_3 子图的个数的两倍。

证：对于每个 $i\in\{1, \cdots, \nu\}$，数$(-1)^iC_i$ 是 $A(G)$的所有 i 阶主子式的和。

(a) 对于单图 G，$A(G)$主对角线元素全为 0，所以$C_1=0$。

(b) 对于单图 G，$A(G)$中非零的 2 阶主子式必为：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

显然，这样的 2 阶主子式对应 G 中的一条边，反之亦真。所以，$(-1)^2C_2=-\varepsilon(G)$。

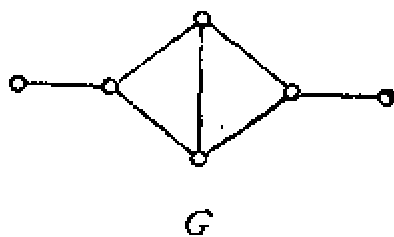
(c) 对于单图 G，$A(G)$中非零的 3 阶主子式必为：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

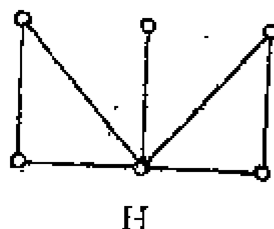
这样的 3 阶主子式对应 G 中一个 K_3，反之亦真。设 G 中有 s 个 K_3，则$(-1)^3C_3=2s$。

1.3.5 若两个非同构的图具有相同的谱，则称它们是**同谱的**。

试证本题的图 G 与图 H 是同谱的。



G



H

1.3.5 图

证：显然 G 与 H 非同构。对于G，H 的顶点任作一种标号，写出 $A(G)$，$A(H)$。经计算可得：

$|\lambda I-A(G)|=|\lambda I-A(H)|=\lambda^6-7\lambda^4-4\lambda^3+7\lambda^2+4\lambda-1$，故 G 与 H 是同谱图。

1.3.6 设 $A(G)$的特征值为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_\nu$，则

$$\lambda_1 \leqslant \sqrt{\frac{2\varepsilon(\nu-1)}{\nu}}$$

证：设 G 的特征多项式为 $\lambda^\nu + C_1\lambda^{\nu-1} + C_2\lambda^{\nu-2} + \cdots + C_\nu$，由练习 1.3.4 知，$C_1=0$，$C_2=-\varepsilon$，根据Vieta定理得：$\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i = -C_1 = 0$

$$\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = C_2 = -\varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i\right)^2 - 2\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = 2\varepsilon$$

因而，$\begin{cases} \lambda_1 = -(\lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu) \\ \lambda_1^2 = 2\varepsilon - (\lambda_2^2 + \cdots + \lambda_\nu^2) \end{cases}$　　　　(*)

又由 Cauchy-Schwarz 不等式可得：

$$|\lambda_2 \cdot 1 + \cdots + \lambda_\nu \cdot 1| \leqslant \sqrt{\lambda_2^2 + \cdots + \lambda_\nu^2}\sqrt{\nu - 1}$$

以(*)代入上式后平方得：$\lambda_1^2 \leqslant (2\varepsilon - \lambda_1^2)(\nu - 1)$，整理即得结论。

(关于图的谱的研究成果，可参阅 D.M.Cvetkovic′，M.Doob,H.Saehs 的专著《Spectra of Graphs》(1980)。)

1.4 子 图

定义：若 $V(H) \subseteq V(G)$，$E(H) \subseteq E(G)$，且 ψ_H 为 ψ_G 在 $E(H)$ 上的限制，则称 H 为 G 的**子图**，记为 $H \subseteq G$；当 $H \neq G$ 时称 H 为 G 的**真子图**，记为 $H \subset G$；若 $V(H)=V(G)$，则 H 称为 G 的**生成子图**。(或**支撑子图**)。去掉 G 中的环和重边的生成子图称为 G 的**基础单图或图图**。

定义：设V'为V的非空子集，G的一个子图，其顶点集合为V'，边集合是G中两端点均在V'中的那些边全体，则称这子图为V'在G中的**导出子图**，记为$G[V']$；类似地由边子集E'可以定义由E'在G中的**边导出子图**，记为$G[E']$。

1.4.1 证明n个顶点的任一个单图均同构于K_n的一个子图。

证：由子图和K_n的定义，结论是显然的。

1.4.2 证明：(a) 完全图的任一个导出子图均是完全的。

(b) 2-部图的一个子图均是2-部图。

证：由完全图，2-部图及导出子图及子图的定义，结论是显然的。

1.4.3 说明$M(G-E')$和$M(G-V')$如何从$M(G)$中得到？又$A(G-V')$如何从$A(G)$中得到？

解：从$M(G)$中划去对应于E'中的边的列，所得的矩阵即为$M(G-E')$。从$M(G)$中划去对应于V'中的顶点的行，在所得到的矩阵中，再划去列和为0或1的列，最后所得的矩阵即为$M(G-V')$。从$A(G)$中划去对应于V'中的顶点的行和列，所得的矩阵即为$A(G-V')$。

1.4.4 找一个不与任何k-方体的子图同构的2-部图。

解：设$G=$3-方体$+e$，其中e为(0, 0, 0)和(1, 1, 1)之间的边。显然G是2-部图(它的顶点可划分成如下两部分，$V_1=\{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$，$V_2=\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$，对

$k\leqslant 3$ 的 k-方体，其边数少于 G 的边数，它的子图不可能与 G 同构。

若 G 与 k-方体 $(k\geqslant 4)$ 某子图同构，注意到 G 中 $(0, 0, 0)$ 与 V_2 中的顶点均相邻。由 k-方体的对称性，适当地进行坐标变换，不失一般性地可假定 $(0, 0, 0)$ 和 $(0, 0, \cdots, 0)$ 相对应，它的邻点 $(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$ $(0, 0, 1)$，$(1, 1, 1)$ 分别依次和 $(1, 0, 0, \cdots, 0)$，$(0, 1, 0, \cdots, 0)$，$(0, 0, 1, 0, \cdots, 0)$，$(0, 0, 0, 1, 0, \cdots 0)$ 相对应。由于 $(1, 0, 0)$ 和 $(1, 1, 1)$ 在 G 中除 $(0, 0, 0)$ 外，还有两个公共邻点 $(1, 1, 0)$ 和 $(1, 0, 1)$，可是按 k-方体边的定义 $(1, 0, 0, \cdots, 0)$ 和 $(0, 0, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ 除 $(0, 0, \cdots, 0)$ 外，仅能和 $(1, 0, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ 这个顶点相邻，矛盾。故 G 不与 $k\geqslant 4$ 的 k-方体的子图同构。

题 1.4.5 设 G 是单图，整数 n 满足 $1<n<\nu-1$。证明：若 $\nu\geqslant 4$，且 G 的所有 n 个顶点的导出子图都具有相同的边数时，则 $G\cong K_\nu$ 或 $G\cong K_\nu^c$。

证：设 G 中 n 个顶点的导出子图的边数为 m。v_i，v_j 是 G 中任意两个顶点，$\varepsilon(G)-d(v_i)=\varepsilon(G-v_i)$，这里 $d(v_i)$ 表示和 v_i 关联的边数。显然在 $G-v_i$ 中取 n 个顶点的导出子图一共有 $\binom{\nu-1}{n}$ 种取法，由于 G 是单图，在 $G-v_i$ 中的任一边 uv，在这 $\binom{\nu-1}{n}$ 个 n 个顶点的导出子图中，取到的次数恰为 $G-\{v_i, u, v\}$ 中取 $n-2$ 个顶点的导出子图的个数 $\binom{\nu-3}{n-2}$，故我们有：

$$\varepsilon(G)-d(v_i)=\varepsilon(G-v_i)=m\binom{\nu-1}{n}\Big/\binom{\nu-3}{n-2} \quad (1)$$

类似地我们有：

$$\varepsilon(G)-d(v_j)=\varepsilon(G-v_j)=m\binom{\nu-1}{n}\bigg/\binom{\nu-3}{n-2} \quad (2)$$

$$\varepsilon(G)-d(v_i)-d(v_j)+a_{ij}=\varepsilon(G-\{v_i, v_j\})$$

$$=m\binom{\nu-2}{n}\bigg/\binom{\nu-4}{n-2} \quad (3)$$

这里a_{ij} 当v_i与v_j相邻时为1，当v_i与v_j不相邻时为0。

由式(3)－(1)－(2)，于是：$a_{ij}=\varepsilon(G)+m\binom{\nu-2}{n}\bigg/\binom{\nu-4}{n-2}-2m\binom{\nu-1}{n}\bigg/\binom{\nu-3}{n-2}$。故$a_{ij}$与$i$，$j$的选取无关，若$a_{ij}=0$，则$G\cong K_\nu^c$，若$a_{ij}=1$，则$G\cong K_\nu$。

1.4.6 G的子图H具有性质P，若不存在具有性质P的子图F，使得$F\supset H$，则称H为具有性质P的**极大子图**。可类似地定义**极小子图**。

证明H是G的基础单图当且仅当它是G的极大子单图。

证：由单图、基础单图及极大子图的定义易知结论成立。

1.4.7 证明：对任意单图G及正整数$m(\leqslant\nu)$，存在m-部生成子图H，满足：

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(H)\leqslant\varepsilon(T_{m,\nu})$$

证：令H是G的边数最多的极大m-部生成子图。由练习1.2.9(b)知，右边不等式显然成立。

下面证左边不等式。设v是G的任一顶点，H的m部顶点划分为$\{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$，不妨设$v\in V_1$，令$d_{V_i}(v)(i=1, \cdots, m)$表示$G$中$v$点在$V_i$中的邻点个数，则有

$$d_{V_1}(v)\leqslant d_{V_i}(v) \quad (i=2, \cdots, m)$$

因为，否则，有 i_0 使得 $d_{V_1}(v)>d_{V_{i_0}}(v)$，这时取 $V_1-\{v\}$，$V_{i_0}\cup\{v\}$ 分别代替 V_1，V_{i_0}，得另一个极大 m-部生成子图 H'，易知 $\varepsilon(H')>\varepsilon(H)$，这与 H 的假定矛盾。

于是 $(m-1)d_{V_1}(v)\leqslant\sum_{i=2}^{m}d_{V_i}(v)=d_H(v)$，这里 $d_H(v)$ 是 v 点在 H 中的邻点个数。令 $d(v)$ 表示 v 点在 G 中的邻点个数，则有：

$$d(v)=d_{V_1}(v)+d_H(v)\leqslant\frac{1}{m-1}d_H(v)+d_H(v)=\frac{m}{m-1}d_H(v)$$

立得： $(1-\frac{1}{m})d(v)\leqslant d_H(v)$

由于 v 的任意性，故有 $(1-\frac{1}{m})\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(H)$。

1.4.8 设单图 $G=(V, E, \psi)$，和任给的单图 $H=(V', E', \psi')$，若有 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$、$V'=\{v_1', v_2', \cdots, v_\nu'\}$，且对每个 $i(i=1, 2, \cdots, \nu)$，$G-v_i\cong H-v_i'$，就有 $G\cong H$。则称 G 是**可重构的**；若有 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$、$E'=\{e_1', e_2', \cdots, e_\varepsilon'\}$，且对每个 $j(j=1, 2, \cdots, \varepsilon)$，$G-e_j\cong H-e_j'$，就有 $G\cong H$，则称 G 是**边可重构的**。证明：

(a) $\nu=2$ 的图不是可重构的；

(b) $\varepsilon=2$, 3 的图不是边可重构的。

证：(a) $\nu=2$ 的单图，一共仅有二图：K_2 与 K_2^c，它们满足重构的条件，但不同构，故(a)成立。

(b) $\varepsilon=2$ 又满足边重构条件的 ν 个顶点的 $G(2)$ 和 $H(2)$ 图仅能是如下单图：$G(2)=2K_2+K_{\nu-4}^c$、$H(2)=P_3+$

K^c_{v-3}，其中 P_2 是长度为 2 的路，但 $G(2)\neq H(2)$；

$e=3$ 又满足边重构条件的 v 个顶点的 $G(3)$和$H(3)$图仅能是如下单图：$G(3)=K_3+K^c_{v-3}$、$H(3)=K_{1,3}+K^c_{v-4}$，但 $G(3)\neq H(3)$，故(b)成立。

〔**重构猜想**(Ulam猜想)(S.M. Ulam 和 P.J. Kelly，1941年)：$v>2$的每个图是可重构的。这一猜想至今未获证明，是图论中的一大难题。相应地有**边可重构的猜想**(F.Harary，1964 年)：$e>3$ 的每个图是边可重构的。关于重构猜想可参看 J.A. Bondy 和 R. J. Hemminger 在 J. Graph Theory Vol.(1977)227-286 的综合性文章。〕

1.5 顶点的度

定义：G 中与顶点 u 关联的边数(我们约定环作二条边计算)称为 G 中顶点 u 的**度**。记为 $d_G(u)$，或简记 $d(u)$，我们用 $\delta(G)$ 与 $\Delta(G)$分别记 G 中顶点的**最小度**和**最大度**。

定理1.1 $\sum\limits_{v\in V} d(v)=2e$。

系1.1任意图中，度为奇数的顶点有偶数个。

定义：若 $\delta(G)=\Delta(G)=k$ 时，称图 G 是 **k-正则图**。

1.5.1 证明 $\delta\leqslant 2e/v\leqslant\Delta$。**证**：由定理1.1我们有 $v\delta\leqslant\sum\limits_{v\in V} d(v)=2e\leqslant v\Delta$。

故命题成立。

1.5.2 若 G 是单图，则 MM' 和 A^2 的对角线上的元素均是 G 的顶点的度。

证：因为 G 是单图，M 和 A 中只有 0 和 1，由 M 的

定义，M 中 i 行向量中"1"的个数恰为 u_i 的度，从而 MM' 中 i 行 i 列位置上的元素为 $d_G(u_i)$。类似地，A 中 i 行向量中"1"的个数恰为 u_i 的度，又 A 是对称的，从而 $AA'=A^2$ 中，i 行 i 列位置上的元素也为 $d_G(u_i)$。

1.5.3 证明：若一个 $k>0$ 的 k-正则的 2-部图有 2-部划分 (X, Y)，则 $|X|=|Y|$。

证：对 2-部图讲 $\sum_{u\in X} d(u)=\sum_{u\in Y} d(u)$，故对 k-正则 2-部图成立 $k|X|=k|Y|$，从而 $|X|=|Y|$。

1.5.4 证明：在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

证：令上述组内人的集合为图 G 的顶点集合，若两人互相是朋友，则其间连以一边，所得之图 G 是组内人员的朋友关系图。显然 G 是单图，图中顶点的度恰表示该人在组内朋友的个数，利用图 G，上述问题就抽象成如下的图论问题：在一单图 G 中，若 $\nu(G)\geqslant 2$，则在 G 中存在度相等的两个顶点。下面我们证明这个命题。

用反证法，设 G 中各点的度均不相等。必有最大度 $\Delta\geqslant\nu-1$，若 $\Delta=\nu-1$，必有 $\delta\geqslant 1$，从而 $\Delta-\delta+1<\nu$，这与各点度均不等矛盾！若 $\Delta>\nu-1$，又与 G 是单图矛盾。

1.5.5 若 G 有顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，则序列 $(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_n))$ 称为 G 的**度序列**。证明非负整数的序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 为某个图的度序列的充要条件是 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数。

证：由定理 1.1 知，必要性是显然的。对于充分性：取 n 个相异顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，若 $d_i=2k$，则在 v_i 处作 k 个

环。若 $d_i=2l+1$，则在顶点 v_i 处作 l 个环，由于 $\sum_{i=1} d_i$ 为偶数，故其中 d_i 为奇数的项数是偶数，从而 d_i 为奇数所对应的顶点 v_i 可以配对并以边相连。最后所得之图记为 G，G 的度序列按作法恰是 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，故充分性成立。

1.5.6 单图的度序列 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 称为**图序列**。

证明：(*a*) 序列(7，6，5，4，3，3，2)和(6，6，5，4，3，3，1)都不是图序列。

(*b*)若 d 为图序列，且 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots d_n$。则 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数，且对 $1 \leqslant k < n$ 成立 $\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$。

(P. Erdös 和 T. Gallai，在 1960 年已证明这是 d 为图序列的充要条件。其充分性证明可参阅 F. Harary，《Graph Theory》P.60，或中译本 P.70。)

证：(*a*)(7，6，5，4，3，3，2)对应的是 7 个顶点的图，若是单图，则每个顶点度最大为 6，现 $d(v_1)=7$，故它不是图序列。(6，6，5，4，3，3，1)对应是 7 个顶点的图，若是单图，则由 $d(v_1)=6$，$d(v_2)=6$ 知，v_1，v_2 和图中每一个顶点均需相连，故图中每一个顶点的度应不小于 2，这又和 $d(v_7)=1$ 矛盾，故它不是图序列。

(*b*)由练习1.5.5知 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数，又 k 个顶点的导出图的顶点的度之和 $\leqslant k(k-1)$(练习1.1.3)，剩下的 $v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_n$ 可给 v_1，v_2，$\cdots$，v_k 最大的可能的度为 $\sum_{i=k+1}^{n} \min(k,d_i)$。故有 $\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$ 成立。

1.5.7 设$\mathbf{d}=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$是非负整数的不增序列，令$\mathbf{d}'$来记序列$(d_2-1, d_3-1, \cdots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n)$。

(*a*)证明$\mathbf{d}$为图序列的充要条件是$\mathbf{d}'$为图序列。

(*b*)利用(*a*)给出构造具有图序列$\mathbf{d}$的单图的一个算法。

(V.Havel, S.Hakimi)

证：(*a*)$\Longrightarrow$：设G是单图，其图序列为$\mathbf{d}$，且$d(v_i)=d_i(i=1, \cdots, n)$，分两种情况证明：

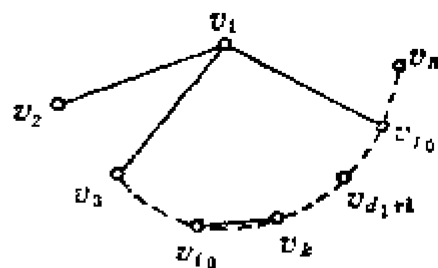
(1) 若v_1关联的d_1条边恰为$v_1v_2, \cdots, v_1v_{d_1+1}$，则$G-v_1$的图序列是$\mathbf{d}'$。

(2) 若v_1关联的d_1条边中，有v_1v_j，且$j>d_1+1$。令 $j_0=\max\{j|v_1v_j\in E(G)\}>d_1+1$，

$i_0=\min\{i|v_1v_i\notin E(G)\}\leqslant d_1+1$，则

$v_1v_{j_0}\in E(G)$，且$j>j_0$时$v_1v_j\notin E(G)$；

$v_1v_{i_0}\notin E(G)$且$i<i_0$时$v_1v_i\in E(G)$。因为$d_{i_0}\geqslant d_{j_0}$，考察与v_{i_0}相邻的d_{i_0}个点，其中必有一点v_k与v_{j_0}不相邻，否则，$d_{j_0}\geqslant d_{i_0}+1>d_{i_0}$矛盾！作$G'=G-\{v_1v_{j_0}+v_{i_0}v_k\}+\{v_1v_{i_0}+v_kv_{j_0}\}$，这时，$G'$与$G$有相同的图序列



1.5.7 (*a*) 图

$\mathbf{d}$，只是 G' 的 j_0 小了，i_0 大了，如此继续下去，必可化为情况(1)。

$\Longleftarrow$：设 G' 的图序列为 $\mathbf{d}'$。在 G' 上加入异于 G' 顶点 $v_2, v_3, \cdots, v_n$ 的新顶点 v_1，并在 v_1 和 $v_2, v_3, \cdots, v_{d_1+1}$ 之间连以边，所得之新图记为 G。则 G 的图序列为 $\mathbf{d}$。

解：(b) 构造图序列为 $\mathbf{d}=(d_1, \cdots, d_n)$ 的单图 G，其步骤如下：

第 1 步：令 $E^{(0)}=\phi$，$\mathbf{d}^{(0)}\leftarrow(d_1, d_2, \cdots, d_n)=\mathbf{d}$，$V^{(0)'}=(v_1^{(0)'}, v_2^{(0)'}, \cdots, v_n^{(0)'})$，$k=1$；

第 2 步：对 $\mathbf{d}^{(k-1)'}=(d_1^{(k-1)'}, d_2^{(k-1)'}, \cdots, d_n^{(k-1)'})$，求出其下标集$(1, 2, \cdots, n)$的一个置换 σ，使 $\sigma\mathbf{d}^{(k-1)'}=(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)})$ 成为一个非增序列。同时，令 $\sigma V^{(k-1)'}=(v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \cdots, v_n^{(k)})=V^{(k)}$，若 $d_1^{(k)}=0$，则转第 4 步；否则，转第 3 步。

第 3 步：令 $E^{(k)}\longleftarrow E^{(k-1)}\cup\{v_1^{(k)}v_j^{(k)} \mid j=2, 3, \cdots, d_1^{(k)}+1\}$，

$$\mathbf{d}^{(k)'}=(0, d_2^{(k)}-1, d_3^{(k)}-1, \cdots, d^{(k)}_{d_1^{(k)}+1}-1, d^{(k)}_{d_1^{(k)}+2}, \cdots, d_n^{(k)}),$$

$k\longleftarrow k+1$，转第 2 步。

第 4 步：令 $G=(V^{(k)}, E^{(k-1)})$，停。

(度序列的综合性文献见 Lecture Notes in Math, 885。《Combinatorics and Graph Theory》(1980) 中 S.B.Rao 的文章。P.417-440)

1.5.8 证明：无环图 G 含 2-部生成子图 H，使得 $\forall v\in V$ 成立 $d_H(v)\geqslant\frac{1}{2}d_G(v)$。

证：设H为含于G中边数最多的一个2-部生成子图，此H即为所求。事实上在无环图中，可以有重边，若两顶点间有重边，计算其中一点的邻点个数时，我们计算其重边的个数。这样改动后，练习[1.4.7]左边不等式的证明仍成立，故这一不等式对无环图也成立。注意到该证明中实际上先证明了$d_H(v) \geqslant (1-1/m)d_G(v)$，令$m=2$，即证。

1.5.9 设$S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是平面上的点集，其中任意两点之间的距离至少是1，证明最多有$3n$对点距离恰好为1。

证：作图G，其中$V(G)=S$，S中两点相连当且仅当两点间距离为1。由于两点间距离为$\geqslant 1$，从而对任意$x_i \in V(G)$，在x_i为心的单位圆周上，最多含有S的六个点，故$d_G(x_i) \leqslant 6$。对G应用定理1.1有$\sum\limits_{i=1}^{n} d_G(x_i)=2e$，从而有$6n \geqslant 2e$，故$3n \geqslant e$。

1.5.10 图G的**线图**是顶点集合为$E(G)$的图，其中两个顶点相连的充要条件是它们在G中为相邻的边。证明：如果G是单图，

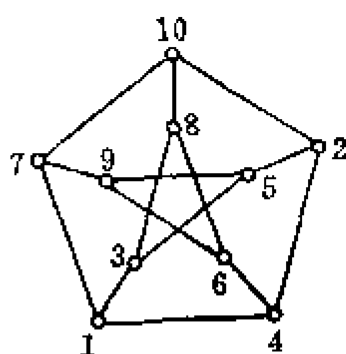
(a) G的线图具有$\varepsilon(G)$个顶点和$\sum\limits_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$条边。

(b) K_5的线图与练习1.2.6中所描述的图的补图同构。

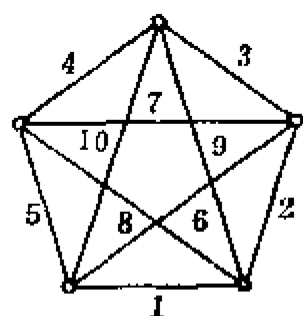
证：按线图的定义，(a)的结论是显然的。

(b) K_5的线图和Petersen图(即练习1.2.6的图)的补图的同构关系，可以由下面两图之间标明的顶点对应并利用练习1.2.5直接验证它。

1.5.11 G是单图，A、M分别是G的邻接矩阵与关



Petersen 图



K_5

1.5.10 (b) 图

联矩阵，A_L 是 G 的线图 $L(G)$的邻接矩阵。

证明：(a) $M'M=A_L+2I_\epsilon$。

(b) 若 G 是 k-正则的，则 $MM'=A+kI_v$。

证：(a)由于$(M'M)_{ij}=\sum\limits_{t=1}^{v}(M)_{ti}(M)_{tj}$，$i\neq j$ 时此数是与边 e_i，e_j 均关联的顶点数，对单图它为1或0，它正好是线图 $L(G)$的顶点 e_i，e_j 间的边数。当$i=j$，显然$(M'M)_{ii}=2$。再由 A_L 的定义，即得(a)。

(b) 由于$(MM')_{ij}=\sum\limits_{t=1}^{\epsilon}(M)_{it}(M)_{jt}$，可知，当$i\neq j$时此数是以 v_i，v_j 为端点的边的数目。当 $i=j$ 时，因 G是k-正则，显然$(MM')_{ii}=k$，故得(b)。

1.5.12 若 G 是 k-正则图，则 k 是 G 的一个特征值，且对 G 的任何特征值 λ 有$|\lambda|\leqslant k$。

证：因 G 是 k-正则的，$u=(1,\cdots,1)'$满足 $Au=ku$，故 k 是 G 的一个特征值。

设 λ 是 G 的任意特征值，则有向量 X 满足 $AX=\lambda X$，其中 $X\neq 0$。令 x_j 是 X 中绝对值最大的分量，则有：

$$|\lambda||x_j|=|\lambda x_j|=|(AX)_j|=\Big|\sum_{a_{ji}=1}a_{ji}x_i\Big|$$

$$\leqslant\sum_{a_{ji}=1}|x_i|\leqslant k|x_j|$$

故 $|\lambda|\leqslant k$。

1.6 路和连通性

定义：G中的**途径**是一个有限非空序列$W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$，它为顶点和边的交错序列，且$e_i(1\leqslant i\leqslant k)$的端点是$v_{i-1}$和$v_i$。上述从$v_0$到$v_k$的途径$W$，记为$(v_0,v_k)$-途径，而顶点$v_0$，$v_k$分别称为$W$的**起点**和**终点**，$v_1,v_2,\cdots,v_{k-1}$称为$W$的**内顶点**，$k$称为$W$的**长**。

若W中e_1，e_2，$\cdots$，e_k两两不相同，我们称它为**迹**。

若迹W中v_0，v_1，$\cdots$，v_k两两不相同，我们称它为**路**。

定义：若G中存在(u,v)-路，则称u，v是**连通的**，顶点的连通性是一个等价关系。$V(G)$的每一等价类的导出子图称为G的一个**连通分支**，记G的连通分支个数为$\omega(G)$，若$\omega(G)=1$，称G是**连通**的，否则称G**不连通**。

1.6.1 证明：如果G中有一条(u,v)-途径，则G中也存在一条(u,v)-路。

证：事实上，我们由u出发沿(u,v)-途径走，若遇到相同点，则把相同点间的那段途径去掉，然后继续沿(u,v)-途径往下走，一直走到终点v为止。按作法知，最后我们所得的(u,v)-途径，它是G中一条(u,v)-路。

1.6.2 证明G中长为k的(v_i,v_j)-途径的条数是A^k中的(i,j)元素。

证：用归纳法证明，$k=1$ 时，由邻接矩阵 A 的定义知结论成立。若 $k-1$ 时结论成立，即

$P_{k-1}=A^{k-1}=\left(P_{ij}^{(k-1)}\right)$，$G$ 中长为 $k-1$ 的 (v_i, v_j)-途径的条数为 $P_{ij}^{(k-1)}$。下面证明 k 时结论也成立。令 $P_k=A^k=\left(P_{ij}^{(k)}\right)$，则 $P_{ij}^{(k)}=\sum\limits_{l=1}^{\nu} a_{il}P_{lj}^{(k-1)}$，显然 G 中任一条长为 k 的 (v_i, v_j)-途径，可看成先经 v_iv_l 边到达 v_l，然后经 (v_l, v_j)-途径到达 v_j，由定义 a_{il} 恰表示 v_i，v_l 间的边数，于是由归纳法假设 $a_{il}P_{lj}^{(k-1)}$ 恰表示长为 k 由 v_i 出发经边 v_iv_l 到达 v_j 的途径的条数。故 $P_{ij}^{(k)}=\sum\limits_{l=1}^{\nu} a_{il}P_{lj}^{(k-1)}$ 表示长为 k 的 (v_i, v_j)-途径的条数。

1.6.3 证明：若 G 是单图且 $\delta\geqslant k$，则 G 有一条长为 k 的路。

证：若 P 是 G 中的一条最长路，它的长 l 小于 k，设 P 为 $v_1v_2v_3\cdots v_lv_{l+1}$，由假定 $d_G(v_1)\geqslant\delta\geqslant k>l$，从而在 P 外存在一顶点 v_0 和 v_1 邻接，于是 $v_0v_1v_2\cdots v_{l+1}$ 是 G 中长于 P 的一条路，这和 P 是 G 中最长路矛盾，故 $l\geqslant k$。我们可以在 P 中取一段长为 k 的路，故 G 中存在长为 k 的路。

1.6.4 证明：G 为连通的充要条件是对 V 的每一个分成二个非空子集 V_1 和 V_2 的划分，存在一条边它的二个端点分别属于 V_1，V_2。

证：$\Longrightarrow$，设 $v_1\in V_1$，$v_2\in V_2$，由 G 的连通性，G 中存在一条 (v_1, v_2)-路，在这路上必有两点 u，v，使 $u\in V_1$，$v\in V_2$，$uv\in(v_1, v_2)$-路，故必要性成立。

$\Leftarrow$：若 G 不连通，则 G 至少存在二个连通分支 G_1，G_2，令 $V_1=V(G_1)$，$V_2=V(G)\setminus V_1$，则按连通分支定义 V_1，V_2 间不存在两个端点分别属于 V_1，V_2 的边，这和充分性假设矛盾，故 G 为连通。

1.6.5 (*a*)证明：若 G 为单图，且 $\varepsilon>\binom{v-1}{2}$则 G 是连通的。

(*b*)对 $v>1$，求一个非连通单图 G 使得 $\varepsilon=\binom{v-1}{2}$。

证：(*a*)若 G 不连通，可分为两个顶点数分别为 v_1,v_2 的互不连通子图 G_1，G_2。易知 $v_i\geqslant 1$，$(i=1,\ 2)$，$v_1+v_2=v_0$ 于是

$$\varepsilon(G)\leqslant\binom{v_1}{2}+\binom{v_2}{2}=\frac{v_1(v_1-1)}{2}+\frac{v_2(v_2-1)}{2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(v-1)(v_1+v_2-2)}{2}=\frac{(v-1)(v-2)}{2}$$

$$=\binom{v-1}{2}.$$

这与$\varepsilon>\binom{v-1}{2}$矛盾！

(*b*) $G=K_{v-1}+K_1$ 即为所求的单图。

1.6.6 (*a*)证明：若 G 为单图，$\delta>[v/2]-1$，则 G 连通。

(*b*) v 为偶数时，找一个$([v/2]-1)$-正则的不连通单图。

证：(*a*) 若 G 不连通，则 v 个顶点至少分属于 G 的两个分支。且有一个分支 C，$|V(C)|\leqslant[v/2]$；由于 G 是单图，故 C 上的顶点的度均不大于$[v/2]-1$，这和 $\delta>[v/2]-1$矛盾。故 G 连通。

(b) $K_{\nu/2}+K_{\nu/2}$ 即为所求之单图。

1.6.7 证明：若 G 不连通，则 G^c 是连通的。

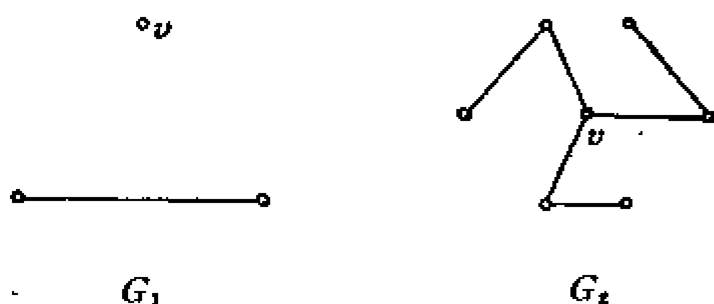
证：对 G^c 的任二点 u，v，若 u，v 在 G 中不相邻，则在 G^c 中相邻。若 u，v 在 G 中相邻，则 u，v 是 G 的一个分支中，且必有 G 的另一分支的点 w 与 u，v 都不相邻，于是 w 与 u，v 在 G^c 中相邻，u-w-v 即为 G^c 中的一条 (u, v)-通路。故 G^c 连通。

1.6.8 (a) 证明：若 $e\in E$，则 $\omega(G)\leqslant\omega(G-e)\leqslant\omega(G)+1$。

(b) 若 $v\in V$，证明上述不等式中 G-e 换成 G-v 一般不成立。

证：(a)若 $e\in E$，由 ω 的定义，显然有 $\omega(G)\leqslant\omega(G-e)$，又注意到一条边 e 至多仅能把 G-e 中两个分支连在一起成为 G 中的一个分支，故 $\omega(G-e)\leqslant\omega(G)+1$。

(b) 如图 G_1，G_2，$\omega(G_1)=2>\omega(G_1-v)=1$，$\omega(G_2-v)=3>\omega(G_2)+1=2$。



1.6.8 (b) 图

1.6.9 证明：若 G 连通，且 G 中每一个顶点的度为偶数，则对任意 $v\in V$，$\omega(G-v)\leqslant d(v)/2$。

证：设 C 为 G-v 的任一分支，由于 G 中的每个顶点的

度为偶数，故 $\sum_{v\in V(C)} d_G(v)$ 亦为偶数，又由定理1.1 G 的子图 C 所产生的度为 $2\varepsilon(C)$，所以由 G 的连通性知，v 与 C 相连，且 $\sum_{v\in V(C)} d_G(v)-2\varepsilon(C)>0$ 为偶数。故 v 伸向 C 中点之边至少二条。从而显然有 $\omega(G-v)\leqslant\frac{1}{2}d(v)$。

1.6.10 证明：在连通图中任意两条最长的路都有公共顶点。

证：设 (v_1, v_2)-路，(v_1', v_2')-路均是 G 中之最长路，且无顶点公共。由 G 是连通的，故存在 (v_2, v_2')-路，令 v_3 为由 v_2 出发沿 (v_2, v_2')-路前进，最后一个和 (v_1, v_2)-路相交的顶点，v_3' 为由 v_3 出发，沿 (v_2, v_2')-路前进，第一个和 (v_1', v_2')-路相交的顶点。不失一般性 (v_1, v_2)-路中 (v_1, v_3)-段的长度不小于 (v_1', v_2')-路中 $(v_1'$ $v_3')$-段，于是从 v_1 出发，经 (v_1, v_2)-路中的 (v_1, v_3)-段，然后经 (v_2, v_2')-路中 (v_3, v_3')-段，最后经 (v_1', v_2')-路中 (v_3', v_2')-段到达 v_2'，显然这条路比原来的 (v_1, v_2)-路要长，这和 (v_1, v_2)-路是最长路矛盾。所以 (v_1, v_2)-路和 (v_1', v_2')-路有公共点。

1.6.11 若顶点 u，v 在 G 中是连通的，则定义 G 中最短的 (u, v)-路的长为 G 中 u，v 之间的**距离**，记为 $d_G(u, v)$；若 u，v 在 G 中不连通，则我们定义 $d_G(u, v)$ 为无穷。证明对于任意三个顶点有 $d(u, v)+d(v, w)\geqslant d(u, w)$。

证：$d(u, v)$ 是在不引起混淆的情况下 $d_G(u,v)$ 的简记。(1)当 u，v，w 连通时，因为由 (u, v)-路和 (v, w)-路，合并起来构成 (u, w)-途径，又因为最短的 (u, w)-路的长不超过上述 (u, w)-途径，故由距离的定义，结论成立。(2)

当u, v, w不连通时，$d(u, v)$, $d(v, w)$, $d(u, w)$中至少二个为无穷。结论也成立。

1.6.12 图G的**直径**是G中两顶点之间的最大距离。证明：若G有大于3的直径，则G^c的直径小于3。

证：对任意一对u, $v\in V(G)$。若边$uv\notin E(G)$，则$uv\in E(G^c)$故$d_{G^c}(u, v)=1$。若$uv\in E(G)$，则$uv\notin E(G^c)$，这时分两种情况讨论。(1)若$V(G)$中任意顶点至少和u, v中一顶点相邻。此时任意的x, $y\in V(G)$有$d_G(x, y)\leqslant 3$，这和假设矛盾，故(1)不可能。(2)$V(G)$中存在一顶点w使uw, $wv\notin E(G)$，则uw, $wv\in E(G^c)$。此时$d_{G^c}(u, v)=2$。综合上述情况，G^c的直径小于3。

1.6.13 证明：若G是直径等于2的单图，且$\Delta=\nu-2$，则$\varepsilon\geqslant 2\nu-4$。

证：由$\Delta=\nu-2$知，G中有顶点v与$\nu-2$个顶点相邻，从而有$\nu-2$条边。剩下的另一顶点u与v必不相邻。为使G的直径为2，u到各顶点的距离不超过2，至少要增加$\nu-2$条边。故$\varepsilon(G)\geqslant 2(\nu-2)=2\nu-4$。

1.6.14 若G是连通单图，但不是完全图，则G存在如下三个顶点u, v和w，满足uv, $vw\in E$, $uw\notin E$。

证：由假定G不是完全图，故存在u, $w_1\in V$, $uw_1\notin E$；由于G是连通的，故存在一条连接u, w_1的最短路，设为$uu_1u_2\cdots u_nw_1$, $n\geqslant 1$。显然$uu_2\notin E$，否则和最短路假定矛盾。于是我们令$u_1=v, u_2=w$(当$n=1$时，$u_2=w_1$)。即为所求。

1.6.15 图G是连通的当且仅当$(A+I)^{\nu-1}$中无零元。

证：$(A+I)^{\nu-1}=\sum_{k=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{k}A^{\nu-k-1}$（其中 $A^0=I$）

⇒：由练习 1.6.2 知，A^k 中的 (i, j) 元是 G 中两顶点 v_i，v_j 间长为 k 的途径的数目。由于 G 是连通图，对任意 (i, j) 一定存在 (v_i, v_j)-路，其路长 k 满足 $0\leqslant k\leqslant \nu-1$，从而 A^k 中的 (i, j) 元非零，故 $(A+I)^{\nu-1}$ 中无零元。

⇐：$(A+I)^{\nu-1}$ 中无零元，对任意 (i, j)，必有 k 满足 $0\leqslant k\leqslant \nu-1$ 使得 A^k 中的 (i, j) 元非零，因而顶点 v_i，v_j 间存在长为 k 的途径。故 G 连通。

1.7 圈

定义：起点和终点相同的途径（迹，路）称为**闭途径**（**闭迹**，**闭路**）。闭路又称为圈。长为 k 的圈称为 k-圈。k 为偶数时称为**偶圈**，k 为奇数时，称为**奇圈**。

定理 1.2 图为 2-部图的充要条件是圈中不含奇圈。

1.7.1 证明：若边 e 在 G 的一个闭迹内，则 e 也在 G 的一个圈内。

证：若 T 是 G 中含 e 的一条闭迹，由 T 中任一点出发，沿 T 前进，若在前进过程中发生经过某顶点 v_0 两次的情况，则将迹中两个 v_0 间的那个圈除去，然后继续沿 T 前进，直到把 T 走完为止。于是这样我们把 T 分解成为圈之和，故 e 在 G 的某一个圈内。

1.7.2 证明：若 $\delta\geqslant 2$，则 G 含有圈。

证：由于$\delta \geq 2$，从而由v_0出发到v_k的路可以向前延伸，又由于G是有限个顶点，从而延伸到某一点后再往下延伸时，必然要和已走过顶点相重，于是我们就得到G中的一个圈。

1.7.3　若G是单图，且$\delta \geq 2$，则G含有长最小为$\delta+1$的圈

证：设G中最长路为(v_0, v_k)-路，其顶点依次为v_0，v_1，v_2，…，v_k。显然v_0的所有邻点均在(v_0, v_k)-路上，不然它和最长路矛盾。取v_0的所有邻点v_i中的足标最大者记为l，显然$l \geq \delta$。于是$v_0 v_1 v_2 \cdots v_l v_0$是$G$中的一个长不小于$\delta+1$的圈。

1.7.4　G的围长是G中最短圈之长。若G不含圈，我们定义G的围长为无穷。证明：

(a)围长为4的k-正则图，至少有$2k$个顶点，在同构意义下，$2k$个顶点这样的图是唯一的。

(b)围长为5的k-正则图至少有k^2+1个顶点。

证：(a)考虑图G相邻的两顶点x，y。令$S(x)$，$S(y)$分别表示G中与x，y距离为1的顶点集，$S(x) \cap S(y) = \Phi$，否则G的围长为3，这和G的围长为4矛盾。因此$|S(x) \setminus y| = |S(y) \setminus x| = k-1$，故至少有$2+2(k-1)=2k$个顶点。若在$S(x)$，$S(y)$间再将它连成完全2-部图。最后所得之图，即是围长为4，$2k$个顶点的k-正则图。由作法知它在同构意义下是唯一的。

(b)从G中顶点x出发，S_i表示在G中与x距离为i的顶点集($i=0, 1, 2, \cdots$)显然S_1中的顶点相互不相邻，S_2中的每一个顶点恰好存在一边与S_1相连，否则G的围

长就小于 5，这与 G 的围长为 5 矛盾。再由正则性，因此 $|S_0|=1$，$|S_1|=k$，$|S_2|=k(k-1)$，故 G 至少有 $1+k+k(k-1)=k^2+1$ 个顶点。

1.7.5 证明：围长为 5 直径为 2 的k-正则图恰有k^2+1个顶点。对 $k=2$，3 找出这样的图。

证：应用练习 1.7.4(b)中的符号和证明过程，由于直径为2，故$S_i(i\geqslant 3)$为空集。从而$|V(G)|=|S_0|+|S_1|+|S_2|=1+k+k(k-1)=k^2+1$ 个顶点。

对于 $k=2$，围长为 5，直径为 2 的 2-正则图是圈 C_5。对于 $k=3$，围长为 5，直径为 2 的 3-正则图是 Petersen 图。

〔(k, g)-笼，又称(k, d)-Moore 图，是顶点数为最少，度为 k，直径为 d 和围长为 g 的正则图。故本题结论说明 C_5 是(2, 5)-笼，Petersen 图是(3, 5)-笼。研究这一类图是代数图论中一个有趣的问题，可以证明有如下关系，$d=〔g/2〕$。对 $g=5$ 的理论上证明存在的笼，先后已构作出来，唯(57, 5)-笼祇知存在的可能性。如果它存在的话，按练习 1.7.4(b)计算将是 3250 个顶点的图。构造这样的图，对设计理论家来说将是一次严重挑战。对这种图的研究，近来已发展成为 Moore 几何理论。有关笼的进一步结论，可参阅 N.L.Biggs 著的《Algebraic graph theory》的第二十三章。〕

1.7.6 证明：(a) 若$\varepsilon\geqslant\nu$，则 G 含有圈。

(b) 若 $\varepsilon\geqslant\nu+4$，则$G$包含两个边不相交的圈。(L.Pósa)

证：(a)若 G 含有环或重边，则 G 含有圈。故不失一般性，可以假定 G 是单图，若 G 存在度为 1 的顶点，则我们

除去这些顶点和它关联的边，我们得 G_1，显然 $\varepsilon(G_1) \geqslant \nu(G_1)$，若 G_1 还存在度为 1 的顶点，则类似由 G 到 G_1 的过程，可得到 G_2，这样继续下去可得 G_3，G_4，…。由于 $\nu=1$ 或 2 的单图不可能满足 $\varepsilon \geqslant \nu_0$，故这过程到某一个 G_m 就停止了。G_m 中每一个顶点的度均不小于 2，即 $\delta(G_m) \geqslant 2$，由练习 1.7.2 知，在 G_m 中存在圈，从而在 G 中亦存在圈。

(b) 事实上，只需证明 $\varepsilon=\nu+4$ 时，命题成立。用反证法，设 G 是满足 $\varepsilon=\nu+4$，但不包含二个边不相交的圈的图簇中顶点数最少的一个图。则 G 有如下两点性质：①G 的围长 $g \geqslant 5$。事实上若 G 的围长 $\leqslant 4$，则在 G 中除去一个长度 $\leqslant 4$ 的圈 C_1 的边，所得之图记为 G'，显然 $\varepsilon(G') \geqslant \nu(G) = \nu(G')$，由(a)，$G'$ 中存在一个圈 C_2；C_1、C_2 的边不相交，但这和 G 的假设矛盾。②$\delta(G) \geqslant 3$。事实上，若 $d(v_0)=2$ 时，设 v_0v_1，$v_0v_2 \in E(G)$，则构作 $G_1=G-v_0+\{v_1v_2\}$；若 $d(v_0) \leqslant 1$ 时，则 G_1 为在 G 中除去 v_0 以及其关联之边($d(v_0)=0$时，任去 G 中一边)所得之图。显然 $\varepsilon(G_1)=\nu(G_1)+4$，$G_1$ 仍是不含二个边不相交的圈的图。但 $\nu(G_1)=\nu(G)-1$，这又与 G 的顶点数为最少的假定矛盾。下面我们由②及定理 1.1 有：$\nu+4=\varepsilon \geqslant 3\nu/2$，所以 $\nu \leqslant 8$。但另一方面，由①，在 G 中存在一个圈 C_g，C_g 上的顶点之间的边，除 C_g 上之边外，再没有其它边，以 S_0 表 C_g 上的顶点集，故由②，S_0 上每一顶点均有伸向 C_g 外的边。记与 S_0 距离为 1 的顶点集为 S_1。则 S_0 的每一点有伸向 S_1 的边，反过来 S_1 中的每一个顶点仅有唯一的一边与 S_0 相连，不然在 G 中则含有长不大于 $g/2+2(<g)$ 的圈，这和 G 的围长为 g 矛盾，故 $|S_0| \leqslant |S_1|$。于是我们有 $\nu \geqslant |S_0|+|S_1| \geqslant g+g \geqslant 10$。但

这又和$\nu\leqslant 8$的结果矛盾。故反证法中假设的G不存在。所以(b)成立。

1.8 最短路问题

定义：对G的每一边e赋以一个实数$w(e)$，称为e的**权**。赋了权的图称**赋权图**。**子图的权**是子图上所有边的权的和。

定义：(u, v)-路的权称该路的**路长**，u，v间最小路长的路称(u, v)的**最短路**。

计算各顶点到u_0的最短路的**Dijkstra算法**（这里是根据原书框图写的）：

第1步：置$l(u_0)=0$；对$v\neq u_0, l(v)=\infty$；$S_0=\{u_0\}$，且$i=0$。

第2步：若$i=\nu-1$，则停，$i<\nu-1$，转3步。

第3步：对每个$v\in\bar{S}_i$，$l(v)\leftarrow\min\{l(v), l(u_i)+w(u_i v)\}$；

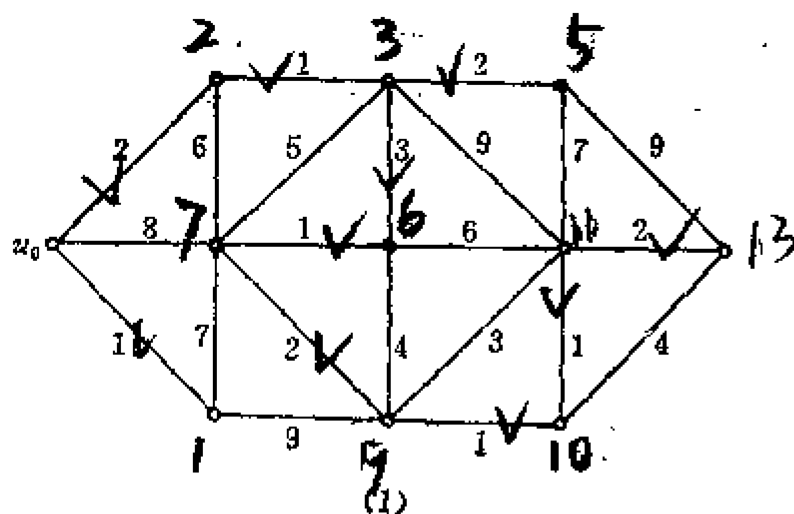
计算$\min\limits_{v\in\bar{s}_i}\{l(v)\}$，并用$u_{i+1}$记达到这最小值的某一顶点，置$S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$，$i\leftarrow i+1$，转2步。

定义：一个图论算法是**好的**，若在任何图上完成这个算法所需要的计算量，由ν和ε的一个多项式为其上界。

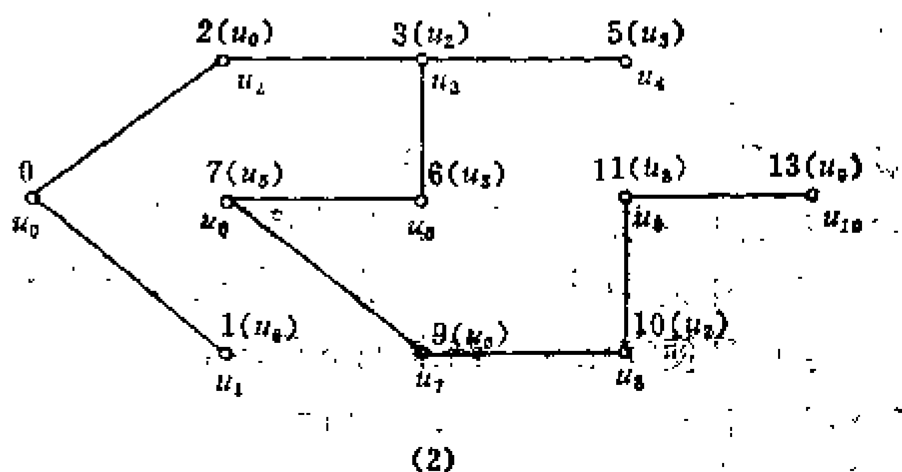
Dijkstra算法是一个好算法。

1.8.1 在本题图(1)的赋权图中，找出从u_0到所有其它顶点的最短路。

解：用Dijkstra算法求解，其结果如图(2)。



(1)



(2)

1.8.1 图

图(2)中各顶点 v 旁的数字即最后的 $l(v)$，它表示从 v 到 u_0 的最短路的长。各 u_j 的下标 j 表示在算法过程中该顶点进入 S 的次序。(u_i)的说明见下题。

1.8.2 为使 Dijkstra 算法除确定距离外，还可确定最短路，需要另加哪些指令？

解：在第 3 步中，当$l(v)=l(u_i)+w(u_i v)$时，记下 u_i，表示该点 v 的 $l(v)$是从 u_i 来的，如上题图(2)中的 (u_i) 所

示。根据(a_i)可回追出各点v到u_0的最短路。

1.8.3 某公司在六个城市$C_1, \cdots, C_6$中有分公司，从C_i到C_j的直接航程票价记在下述矩阵的(i, j)位置上。(∞表示无直接航路)。

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

该公司想要一张任两城市间的票价最便宜的路线表，试作出这样的表格。

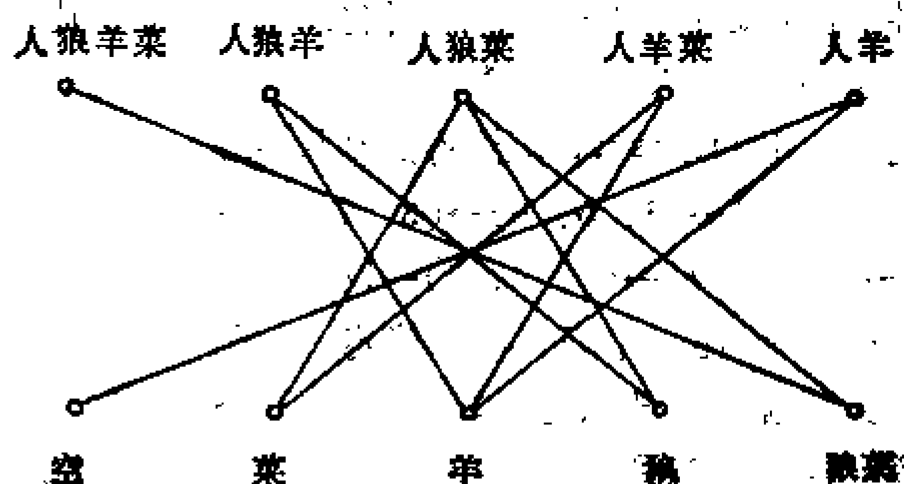
解：以$C_1, \cdots, C_6$为顶点，两顶点相邻当且仅当票价不为∞。各边上的权等于票价。在这样的赋权图上，重复使用练习1.8.2中的Dijkstra算法，算出C_i（即u_0）到C_j $(i<j)$的票价最便宜路线。结果如下页表。

1.8.4 在一河岸有狼、羊和卷心菜，摆渡人要将它们渡过河去，但由于他的船太小，每次只能载一样东西，显然，狼和羊，羊和卷心菜都不能在无人监视的情况下放在一起，问摆渡人将如何把它们渡过河去？

解：人、狼、羊、菜四种东西的任意组合，共有$2^4=16$种情况，其中狼羊菜、羊菜、狼羊三种情况不允许，因而这三种情况的余：人、人狼、人菜三种情况也不会出现。这样，岸上只能有如下10种情况：

人狼羊菜　人狼羊　人狼菜　人羊菜　人羊　空　菜　羊　狼　狼菜

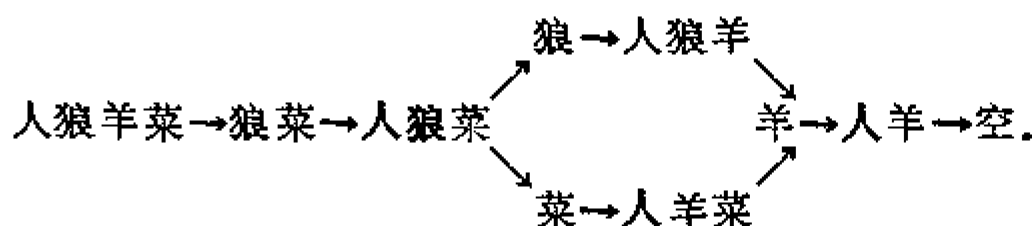
起终城市	最便宜路线	票价
$C_1 \rightleftarrows C_2$	$C_1 \rightleftarrows C_6 \rightleftarrows C_2$	35
C_3	$C_1 \rightleftarrows C_5 \rightleftarrows C_3$ 或 $C_1 \rightleftarrows C_6 \rightleftarrows C_4 \rightleftarrows C_3$	45
C_4	$C_1 \rightleftarrows C_5 \rightleftarrows C_4$ 或 $C_1 \rightleftarrows C_6 \rightleftarrows {}_4$	35
C_5	$C_1 \rightleftarrows C_5$	25
C_6	$C_1 \rightleftarrows C_6$	10
$C_2 \rightleftarrows C_3$	$C_2 \rightleftarrows C_3$	15
C_4	$C_2 \rightleftarrows C_4$	20
C_5	$C_2 \rightleftarrows C_4 \rightleftarrows C_5$	30
C_6	$C_2 \rightleftarrows C_6$	25
$C_3 \rightleftarrows C_4$	$C_3 \rightleftarrows C_4$	10
C_5	$C_3 \rightleftarrows C_5$ 或 $C_3 \rightleftarrows C_4 \rightleftarrows C_5$	20
C_6	$C_3 \rightleftarrows C_4 \rightleftarrows C_6$	35
$C_4 \rightleftarrows C_5$	$C_4 \rightleftarrows C_5$	10
C_6	$C_4 \rightleftarrows C_6$	25
$C_5 \rightleftarrows C_6$	$C_5 \rightleftarrows C_1 \rightleftarrows C_6$ 或 $C_5 \rightleftarrows C_4 \rightleftarrows C_6$	35



1.8.4 图

将这10种情况各用一顶点表示。两种情况的两顶点有边相连，当且仅当两种情况可用载人(或加一物)的渡船互相转变。于是可得上图：

我们的问题化为求一条从"人狼羊菜"顶点到"空"顶点的路，如果各边赋权为1，即化为求一条这样的最短路。从图用Dijkstra算法易知，摆渡人有如下两种办法渡河：



1.8.5 某二人有一只8升的酒壶装满了酒，还有两只空壶，分别为5升和3升。试问将酒平分的最简单方法应当怎样？

解：设 x_1，x_2，x_3 分别表示8，5，3加仑酒壶中的酒量。则 $x_1+x_2+x_3=8$，$x_1\leqslant 8$，$x_2\leqslant 5$，$x_3\leqslant 3$ 的非负整数向量(x_1，x_2，x_3)可表示装酒的各种可能情况，(共24种)。每一可能情况用一顶点表示，两顶点间有边相连，当且仅当该两种情况可通过倒酒的方法互相变换。如果各边赋权为1，于是，问题化为在这样的图上求(8，0，0)到(4，4，0)的最短路。用Dijkstra算法得到结果如下：

(8，0，0)→(3，5，0)→(3，2，3)→(6，2，0)→(6，0，2)→(1，5，2)→(1，4，3)→(4，4，0)。

1.8.6 给出一个好算法来确定：(a)图的分支；(b)图的围长。并说明为什么是好算法？

解：(a) 注意到对所有边赋权1，不相邻两点间赋权∞的图使用Dijkstra算法时，第3步中可能出现 $\min\limits_{v\in\bar{S}_i}\{l(v)\}=\infty$

的情况。这说明 u_0 所在分支 $H(u_0)$ 的顶点已经算完，且 $V(H(u_0))=S_i$。据此，我们只要将Dijkstra算法作适当修改，可得一个求图的分支的好算法，步骤如下：

第 0 步：$\omega=1$，$V=V(G)$，V 中任选一顶点 u_0；

第 1步：置$l(u_0)=0$，对$v\neq u_0$，$l(v)=\infty$，$S_0=\{u_0\}$，且 $i=0$；（同Dijkstra 算法第 1 步）。

第 2 步：若 $\bar{S}_i=\phi$，则 $V_\omega=S_i$，停止：（这时，图的分支数为 ω，各分支顶点集为$\{V_1, \cdots, V_\omega\}$），否则，转第 3 步。

第 3 步：对每个 $v\in\bar{S}_i$，$l(v)\leftarrow\min\{l(v), l(u_i)+w(u_i v)\}$；计算 $\min\limits_{v\in\bar{S}_i}\{l(v)\}$后，增加如下指令：

若 $\min\limits_{v\in\bar{S}_i}\{l(v)\}=\infty$，则$V_\omega\longleftarrow S_i$，$V\longleftarrow\bar{S}_i$，$\omega\longleftarrow\omega+1$，且在 $\bar{S}_i$(即 V) 中任选一顶点为 u_0，转第 1 步。

否则，用 u_i+1 记达到 $\min\limits_{v\in\bar{S}_i}\{l(v)\}$的某一顶点，并置 $S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$，$i\leftarrow i+1$ 转第 2 步，

显然，这一算法的计算量与Dijkstra 算法的计算量基本一样，因为增加指令并没有增加大于 ν^2 数量级的计算量，故也是 ν^2 数量级的，是一个好算法。

(*b*) 为了简便，我们只对 $\nu\geqslant3$ 的连通的单图加以说明。在这样的图 G 中，取一顶点 u_0，设 T_{u_0} 是利用 Dijkstra 算法得到的各顶点到 u_0 的最短路所形成的树，树 T_{u_0} 称为 u_0 的最短路生成树，每个不在树 T_{u_0} 上的边 e，唯一对应一个圈，这个圈上的其它边都在树 T_{u_0} 上，这种圈称为 u_0 的生成树圈，记 $C_e(e\notin T_{u_0})$，它们有 $\varepsilon-\nu+1$ 个。

当 u_0 是 G 中某个最短圈 C 上的一个顶点时，则存在一个 u_0 的生成树圈是 G 的最短圈。据此，可将 Dijkstra 算法增加些指令，修改为一个求图的围长的好算法。其步骤如下：

第 0 步，V 中任取一顶点 u_0；$U_0=\{u_0\}$；$|C|=\infty$。

第 1 步，同 Dijkstra 算法第 1 步。

第 2 步，若 $i=\nu-1$，则转第 4 步；否则，$i<\nu-1$ 转第 3 步。

第 3 步，同 Dijkstra 算法第 3 步。

第 4 步，计算 u_0 的所有生成树圈的圈长，即：$|C_e|$，$(e,\ \notin T_{u_0})$；

$$|C|\leftarrow\min\left\{|C|,\ \min_{e\notin T_{u_0}}\{|C_e|\}\right\};$$

若 $|C|=3$，转第 5 步，否则，$|C|>3$，转第 6 步。

第 5 步，停(围长为 3)。

第 6 步，若 $|U_0|=\nu$，转第 7 步；否则，在 V/U_0 中任取一顶点 u_0，$U_0\leftarrow U_0\cup\{u_0\}$，转第 1 步。

第 7 步，停(围长为 $|C|$)。

这个算法的计算量为 ν^3 数量级。因为 Dijkstra 算法的计算量是 ν^2 级的，我们又将它重复了 ν 次。而且，计算 u_0 的生成树圈圈长的计算量也不超过 ν^3 级。所以这是一个好算法。

1.9 Sperner 引理

定义：设 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_q,\ (q\leqslant n)$ 是 E^n 中的最广点

组(即向量组$\{x_i - x_0 | i=1, \cdots, q\}$是线性无关组)。

令 $x=\sum_{i=0}^{q}\lambda_i x_i$, $\sum_{i=0}^{q}\lambda_i=1$, $\lambda_i\geqslant 0$, $(i=0, 1, \cdots, q)$

E^n 中这样的 x 的集合称为一个 **q 维单形**。2 维单形是闭三角形。

定义：将 q 维单形 T，重分为有限个较小的 q 维单形，使得任意两个小 q 维单形如果相交，则相交部分恰是它们 $k+1$ 个公共顶点形成的 k 维子单形。这样的重分称为**单纯重分**。

定义：将单纯重分了的 q 维单形 T 中的所有小 q 维单形的顶点标记以 0, 1, …, q；这个标记称为**固有的**，若它满足：

(1) T 的 $q+1$ 个顶点以任何顺序被标记为 0, 1, …, q。

(2) T 的被标为 i_1, i_2, …, i_{k+1} $(1\leqslant k<q)$ 的顶点组成的 k 维子单形中的每个重分顶点，只能标为 i_1, i_2, …, i_{k+1} 中的一个。特别地，T 的被标为 i, j 的边上重分顶点只能标为 i 或 j。

定义，单纯重分中的 q 维小单形，若其 $q+1$ 个顶点具有 $q+1$ 个不同标记，则称为**可识别的 q 维单形**。

定理 1.3(Sperner 引理) 每一标以固有标记的三角形单纯重分，有奇数个可识别的三角形。

1.9.1 设 T 是 2 维单形(闭三角形)，T_0 是 T 的外部区域 对 T 任作一单纯重分，T_1, …, T_n 是单纯重分下

的小三角形，又任给一个固有标记。作图 G 如下：$V=\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$，$v_i$，$v_j$ 连以边，当且仅当 T_i，T_j 的公共边是一条其端点标记为 0 和 1 的线段(1 维单形)。

试证：v_0 是 G 中的奇数度顶点。

证：T 的(0, 1)边上的重分顶点的固有标记只能标 0 或 1，其标号序列为：(0,…,0,1,…,1,0,…,0,1, …, 1, 0, …, 1, …, 1)，注意到与 T_0 有公共(0, 1)边界的小三角形的个数恰好是上述标号序列中产生的(0, 1)边界的个数。这个序列里最后一段 0, 1, …, 1 子序列有 1 个(0, 1)边界，其它的 0, 1, …, 1, 0 子序列都有 2 个(0, 1)边界，所以这种(0, 1)边界共有奇数条，从而 v_0 是奇数度的。

1.9.2 设 T 是顶点为 x_0，x_1，x_2 的闭三角形，T 上的点 x 可表为：

$$x=a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2, \quad \sum_{i=0}^{2}a_i=1, \quad a_i\geqslant 0$$

$(i=0, 1, 2)$。(a_0, a_1, a_2)称 x 的重心坐标。

又设 f 是 T 到自身的 1-1 连续映射：

$$f(a_0, a_1, a_2)=(a_0', a_1', a_2')$$

令 $S_i=\{x|x=(a_0,a_1,a_2),\ a_i'\leqslant a_i\}\quad (i=0, 1, 2)$

试证：(a)对 T 的任一单纯重分，存在固有标记使得标记为 i 的顶点都属于 S_i；

(b) 集合 S_i 是闭的。

证：(a)对任一 $x\in T$，设 $x=(a_0, a_1, a_2)$，$f(x)=(a_0', a_1', a_2')$。则 $\exists S_i$ 使得 $x\in S_i$ 且 $a_i>0$；因为，否则对任一 $a_j>0$ 有 $a_j'>a_j$，从而 $\sum\limits_{i=0}^{2}a_i'>\sum\limits_{j=0}^{2}a_j$，矛盾！

于是，对 f 及 T 的任一单纯重分存在如下标记法：

一个重分顶点 $x\in S_i$ 且 $a_i>0$，则 x 标记为 i。因为 T 的三个顶点 $x_i(i=0, 1, 2)$显然有 $a_i=1$，$x_i\in S_i$，故在这个标记法下被标为 i，其次，比如 x_0x_1 边上的重分顶点，它的原重心坐标有 $a_2=0$，这一标记法下不会标为 2；故必被标为 0 或 1；对 x_0x_2，x_1x_2 上的重分点可作类似论证。从而这个标记法是固有标记，且标为 i 的顶点属于 S_i。

(b) 设 $y_n=(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)})\in S_i$，$f(y_n)=(a_0^{(n)\prime}, a_1^{(n)\prime}, a_2^{(n)\prime})$，于是有$a_i^{(n)\prime}\leqslant a_i^{(n)}$。又设$y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。由 f 的连续性，有：$z=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}y_n)=f(y)$。因 T 是闭的，故y，$z\in T$，且 z 是 y 的 f 象点。即，若 $y=(a_0, a_1, a_2)$则 $z=(a_0', a_1', a_2')=f(a_0, a_1, a_2)$，且有$a_i'=\lim\limits_{n\to\infty}a_i^{(n)\prime}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a_i^{(n)}=a_i$，所以，$y\in S_i$，故 S_i 是闭的。

1.9.3 对高维单形的情形，叙述并证明Sperner 引理。

解：q 维单形的 Sperner 引理："每一标以固有标记的 q 维单形的重分中有奇数个可识别的 q 维单形。"

证明如下：设 T 是被单纯重分且标以固有标记的原 q维单形。$T^{(k)}$ 是 T 中标记以 0，1，…，k 的顶点作成的 k 维子单形。现用归纳法证明$T^{(k)}(k>2)$中的可识别的 k 维单形是奇数个。

2 维Sperner引理已证明$T^{(2)}$中可识别的 2 维单形(三角形)有奇数个。现归纳假设 $T^{(k-1)}$中的可识别的 $k-1$ 维单形是奇数个。考虑$T^{(k)}$外的区域$T_0^{(k)}$及 T 的限制在$T^{(k)}$中的单

纯重分与固有标记。设$T^{(k)}$的这一重分为$T_1^{(k)}$，…，$T_n^{(k)}$，令v_0，v_1，…，v_n与$T_0^{(k)}$，$T_1^{(k)}$，…，$T_n^{(k)}$一一对应，在$\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$上构造一个图，$T_i^{(k)}$，$T_j^{(k)}$有公共面单形被标以0，1，…，$k-1$的充要条件是$v_i$与$v_j$相连接，于是$v_0$与$v_i$相连，当且仅当$T_i^{(k)}$中含有落在$T^{(k)}$的标以0，1，…，$k-1$的面单形上的可识别的$k-1$维面单形。由归纳假设，这有奇数个，所以$v_0$是奇数度。于是由系1.1知$v_1$，…，$v_n$中有奇数个是奇数度的顶点。任取一个奇数度的顶点$v_j$，它对应的$T_j^{(k)}$中已有$k$个顶点标为0，1，…，$k-1$，所以另一顶点必标为$k$（否则$v_j$是2度，矛盾）。故$T_j^{(k)}$是可识别的$k$维单形。$T^{(k)}$中的这种$T_j^{(k)}$有奇数个，所以$T^{(k)}$中有奇数个可识别的$k$维单形。

第二章　树

2.1　树

定义：无圈图，不包含圈的图。

定义：连通的无圈图称为**树**。

定理2.1　树中任意两顶点有唯一的路相连。

定理2.2　若 G 是树，则 $\varepsilon(G)=\nu-1$。

系2.2　非平凡树至少有二个度为 1 的顶点。

2.1.1　证明：如果无环图 G 的任意两顶点都被唯一的路相连，则 G 是树。

证：由于 G 中任意两顶点都被唯一的路相连，故 G 连通。又若 G 含有圈 C，则 C 上的两点，在 G 中存在两条路相连，这与"唯一的路"的假定矛盾，故 G 中不含圈，由树的定义，G 是树。

2.1.2　通过证明非平凡树中的最长路的起点和终点度均是 1，来证明系2.2。

证：事实上若非平凡树中的(u, v)-路的起点或终点的度大于 1 。这时因树无圈，易知(u, v)-路可继续延长。故对非平凡树中的最长路的端点和终点度必为 1，所以系2.2成立。

2.1.3 用练习1.7.2证明系2.2。

证：若$\delta(G)\geqslant 2$，则由练习1.7.2 G中含有圈，这和G是树不含有圈相矛盾。故G至少存在一个顶点u，$d(u)=1$，在G中由u出发的(u,v)-路，若$d(v)$大于1，显然(u,v)-路可继续延伸，由于G中不含圈，这种路的延伸永远不会终止，但这又和G是有限图相矛盾，故G中除u外至少还存在一个顶点度亦为1。所以系2.2成立。

2.1.4 证明：若一棵树恰好有两个顶点的度为1，则它是一条路。

证：设G是恰有两个1度顶点的树，则$\varepsilon=\nu-1$，$\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon=2(\nu-1)$，$G$连通且除两个1度点外，其它顶点的度$\geqslant 2$。若其它顶点中有度大于2的顶点，则$\sum_{v\in V}d(v)>2+2(\nu-2)=2(\nu-1)$，矛盾！故其它顶点度均为2。于是$G$是路。

2.1.5 设G是有$\nu-1$条边的图，证明下列三个命题是等价的：(a) G是连通的；(b) G是无圈的；(c) G是树。

证：事实上由树的定义(c)⇒(a)，(c)⇒(b)是显然的。故剩下要证明的是(a)⇒(b)，从而⇒(c)；和(b)⇒(a)，从而⇒(c)。对于(a)⇒(b)，若G含有圈C，长度为n，则C上有n个顶点和n条边，对于那$\nu-n$个不在C上的顶点，每一个顶点必有一条关联于它的边，且这条边在连接它与圈C的最短路上，这种边每条均不相同，所以$\varepsilon\geqslant\nu$。这与$\varepsilon=\nu-1$假设矛盾，故G不含圈，即(b)成立。对于(b)⇒(a)，若G不连通，设含有$\omega(G)\geqslant 2$个分支，由(b)显然这些分

支均为树，对每个分支用定理2.2然后相加，我们有$\varepsilon(G)=\nu-\omega(G)<\nu-1$，这和$\varepsilon=\nu-1$矛盾，故$G$连通，即(a)成立。

2.1.6 证明：若G是$\Delta\geqslant k$的树，则G至少有k个顶点度为1。

证：用反证法，若G中度为1的顶点个数s小于k，

由定理1.1 $2\varepsilon(G)=\sum_{v\in V(G)}d(v)\geqslant 2[\nu(G)-(s+1)]+k+s\geqslant 2\nu-1$，这和定理2.2矛盾。故命题成立。

2.1.7 一个无圈图，亦称森林，证明：

(a) 森林的每分支为树。

(b) 当且仅当$\varepsilon=\nu-\omega$时，G是森林。

证：(a) 由森林和树的定义，结论显然。

(b) 若G具有ω个连通分支，且$\varepsilon=\nu-\omega$，假如G中某一分支C_1含有圈，则由练习2.1.5中的(a)⇒(b)的证明知$\varepsilon(C_1)\geqslant\nu(C_1)$，而对$G$的其它的分支$C_i$，我们有$\varepsilon(C_i)\geqslant\nu(C_i)-1$。故$\varepsilon=\sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon(C_i)\geqslant\sum_{i=1}^{\omega}\nu(C_i)-\omega+1=\nu-\omega+1$，与假设矛盾。所以$G$中不含圈，是森林。反过来，若$G$是具有$\omega$个分支的森林，对$G$的每一分支$C_i$，由(a)及定理2.2有$\varepsilon(C_i)=\nu(C_i)-1$。故有$\varepsilon=\sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon(C_i)=\sum_{i=1}^{\omega}\nu(C_i)-\omega=\nu-\omega$。

2.1.8 G的中心定义为使$\max_{v\in V}d(u,v)$最小的一个顶点u。证明树或者仅有一个中心或者有两个相邻的中心。

证1：这结论对于树K_1，K_2是显然的。我们证明任何一个其它的树T，与除去T的所有度为1的顶点(即T的

端点)得到的树T'有同样的中心。显然，由T的一个给定顶点u到T的任何一个其它的点v的距离仅当v是一端点时，才可能达到最大值。于是$\max\limits_{v\in V(T)} d(u,v)=\max\limits_{v\in V(T')} d(u, v)+1$。故$T$，$T'$有相同中心。若重复这种除去端点的过程，我们相继得到一系列与T具有相同中心的树，因为T有限，故经有限步后，我们最终得到的树是K_1或K_2。且K_1，K_2的中心即为T的中心。从而T的中心正好由一个顶点或两个相邻顶点组成。

证2：考虑G中的最长路$P=v_0v_1\cdots v_k$，当k为偶数时，$v_{k/2}$是G的唯一的一个中心；当k为奇数时，$v_{(k-1)/2}$，$v_{(k+1)/2}$是G的唯一的相邻的两个中心。详细证明从略。

2.1.9 证明 若G是恰好具有$2k$个顶点为奇数度的森林。则G中存在k条边不相交的路，P_1，P_2，…，P_k，使得$E(G)=E(P_1)\cup E(P_2)\cup\cdots\cup E(P_k)$。

证：用数学归纳法，由系2.2知，G的每一个非平凡连通分支至少存在两个奇数度顶点。故当$k=1$时，G仅有一个非平凡连通分支C，由练习2.1.4，C是一条路。从而当$k=1$时，命题成立。若命题对$k=n-1$已成立，当$k=n$时，任取G中的一个非平凡分支C_1，由系2.2设u，v是C_1上的两个度为1的顶点，P_n为联结u，v之路。显然$G-E(P_n)=G_1$，仍是一个森林，其顶点为奇数度的个数恰为$2(n-1)$个。由归纳法假设，存在$P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$路，两两边不相交，且有$E(G_1)=E(P_1)\cup\cdots\cup E(P_{n-1})$。故我们得到边不相交的$P_1$，$P_2$，…，$P_{n-1}$，$P_n$路，且有$E(G)=E(G_1)\cup E(P_n)=E(P_1)\cup\cdots\cup E(P_{n-1})\cup E(P_n)$。由

归纳法知命题成立。

2.1.10 证明：正整数序列$(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$是树的度序列的充要条件为

$$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu-1).$$

证：⇒：由定理1.1，定理2.2，结论是显然的。

⇐：设正整数序列$(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$满足$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu-1)$，由练习1.5.5知，它是一个度序列。设$G$是这个度序列的图簇中连通分支最少的一个图，知$\varepsilon(G)=\nu-1$。假如$G$不连通，则$\omega(G)\geqslant 2$，且至少有一分支$G_1$含有圈$C$；否则，$G$是森林，$\varepsilon(G)=\nu-\omega<\nu-1$矛盾！从$C$中任取一边$e_1=u_1v_1$。并在另一分支$G_2$中任取一边$e_2=u_2v_2$，作图

$$G'=G-\{u_1v_1, u_2v_2\}+\{u_1v_2, u_2v_1\}$$

G'的度序列仍为$(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$且$\omega(G')=\omega(G)-1$，这与$G$的选取矛盾！故$G$是连通的。由练习2.1.5(a)知$G$是树。从而$(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$是树的度序列。

2.1.11 设T是任一棵$k+1$个顶点的树。若G是单图，且$\delta\geqslant k$，则G中含有与T同构的子图。

证：对k用归纳法。当$k=1$，$T=K_2$，显然对G，由于$\delta\geqslant 1$，故$\varepsilon(G)\geqslant 1$，所以$G$中含有$T$的同构子图。故$k=1$时命题成立。今考虑$k=n(>1)$的情况。设$T$是一棵$n+1$个顶点的树，则由系2.2，存在$u$，$v\in V(T)$，$d_T(v)=1$，$uv\in E(T)$。考虑$T_1=T-\{v\}$，显然$T_1$仍是树，且$|V(T_1)|$

$=n$。由归纳假设在 G 中存在一个子图 $\tilde{T}_1\cong T_1$，且设在这同构对应下 s 与 u 相对应。由于 $d_G(s)\geqslant\delta\geqslant n$，另一方面由于 $|V(\tilde{T}_1)|=|V(T_1)|=n$，$d_{\tilde{T}_1}(s)=d_{T_1}(u)\leqslant n-1$。从而在 $V(G)$ 中存在与 $V(\tilde{T}_1)$ 相异的 s 的邻点 t，令 $\tilde{T}=\tilde{T}_1+\{s\ t\}$，易知 $\tilde{T}$ 是一棵树，且 $\tilde{T}\cong T$。故由归纳法命题成立。

2.1.12 饱和烃是一个形如 C_mH_n 的分子，其中每一个碳原子有四个价键，氢原子有一个价键，且不存在一串价键构成圈。证明：对于每一个正整数 m，仅当 $n=2m+2$ 时，C_mH_n 才可能存在。

证：若将碳、氢原子看成顶点，其价键看成边，则 C_mH_n 分子结构图 T 是 m 个 4 度顶点，n 个 1 度顶点的树。且 $\nu(T)=m+n$，$\sum\limits_{v\in V(T)}d(v)=4m+n$。由练习 2.1.10知，

$4m+n=2(m+n-1)$，故 $n=2m+2$。

2.1.13 设 ν_i 是树中度为 i 的顶点数。证明：$\nu_1\geqslant\nu_i$，$(i=2,\ 3,\ \cdots,\ \Delta)$或 $\nu_2>\nu_1\geqslant\nu_i$，$(i=3,\ 4,\ \cdots,\ \Delta)$。

证：显然只要证明 $\nu_1\geqslant\nu_i$，$(i=3,\ 4,\ \cdots,\ \Delta)$就够了。由定理 2.2 知，$\varepsilon=\nu-1=\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\Delta-1$，再由定理 1.1.有：

$$2(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\Delta-1)=\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots+\Delta\nu_\Delta$$

$$\nu_1=\nu_3+2\nu_4+\cdots+(\Delta-2)\nu_\Delta+2$$

故 $\qquad \nu_1\geqslant\nu_i\quad(i=3,\ 4,\ \cdots,\ \Delta)$

2.2 割边和键

定义：G 中满足 $\omega(G-e)>\omega(G)$ 的边 e 称为 G 的割

边。

定义：设 S 是$V(G)$中任一非空真子集，$\bar{S}=V\setminus S$，在 G 中连结 S、$\bar{S}$ 之间的边集，记为$[S, \bar{S}]$，称为 G 的一个**边割集**。若 $\omega(G-[S, \bar{S}])=\omega(G)+1$，则称$[S, \bar{S}]$是 G 的一个**键**。

定义：设 T 是连通图 G 的一棵生成树，我们称$\bar{T}=G-E(T)$为 G 中 T 的**余树**。

定理2.3 e 是 G 的割边的充要条件是 e 不含于 G 的任一圈中。

定理2.4 连通图是树的充要条件是它的每一边均是割边。

系2.4.1 每个连通图都有生成树。

定理2.5 设 T 是连通图 G 的生成树，$e\in E(G)\setminus E(T)$，则 $T+e$ 包含 G 中唯一的一个圈。

定理2.6 设 T 是连通图 G的生成树，令$e\in E(T)$，则(i)余树 $\bar{T}$ 不包含 G 的任何键。(ii)$\bar{T}+e$包含 G 的唯一的一个键。

[注：圈和键，生成树和余树等概念的公理化，引出了拟阵这一分支，它统一处理了图论中许多定理和结果。关于拟阵的理论可参阅D.J.A.Welesh著的《Matroid Theory》(1976)。]

2.2.1 证明 G 是森林的充要条件是 G 的每一边是割边。

证：G 是森林$\Longleftrightarrow G$ 的每分支是树 $\overset{\text{定理2.4}}{\Longleftrightarrow}$ G 的每一边

是割边。

2.2.2 若G连通且$e\in E$，证明：

(a) e属于G的每一个生成树，当且仅当e是G的割边。

(b) e不属于G的任一个生成树，当且仅当e是G中的环。

证：(a)⇒：若e不是G的割边，则$G-e$连通。由系2.4.1在$G-e$中包含一生成树T。显然T亦是G的生成树且不包含e，这和假定矛盾。故e是G的割边。

⇐：若e是G的割边，且在G中存在一个不含e的生成树T。由定理2.5，$T+e$包含一圈C，且$e\in C$，这与e是割边矛盾。从而e属于G的每一个生成树。

(b) ⇒：由系2.4.1知，在G中存在生成树T，由假设$e\notin T$，又由定理2.5，$T+e$包含圈C。若C包含异于e的边e'，现构造$T'=T+e-e'$，显然T'连通，且$\varepsilon(T')=\nu-1$，由练习2.1.5(a)知T'也是G的一棵生成树且包含e，这和假设矛盾。故$E(c)=e$，即e是G中的环。

⇐：e是G中的环，显然由树的定义，它不可能属于G的任一生成树。

2.2.3 证明：若G不含环，且恰好有一棵生成树T，$G=T$。

证：因T是G的生成树，故$V(G)=V(T)$；若有$e\in E(G)/E(T)$，由G不含环，e不是环，由定理2.5，$T+e$包含的圈中必有另一边$e'\in T$，易知$T'=T+e-e'$仍是G中的一棵生成树，这与G只有一棵生成树T的假定矛盾，故$E(G)=E(T)$，从而$G=T$。

2.2.4 设F是G的极大森林，证明：

(a) 对 G 的每一分支 H，$F\cap H$ 都是 H 的生成树；

(b) $\varepsilon(F)=\nu(G)-\omega(G)$。

证：(a) 显然 $F\cap H$ 是 H 上的森林，若它不是 H 的生成树，则存在 $e\in E(H)$，$e\notin E(F\cap H)$，且 $F\cap H+e$ 仍为 H 上的森林。于是 $F+e$ 显然是 G 上的森林，且 $\varepsilon(F+e)=\varepsilon(F)+1$。这和 F 是 G 的极大森林的假定矛盾。故 $F\cap H$ 是 H 的生成树。

(b) 由(a)及定理2.2，易知(b)成立。

2.2.5 证明：G 至少包含 $\varepsilon-\nu+\omega$ 个不同的圈。

证：对于 G 是连通的情况，即 $\omega(G)=1$ 时，由系2.4.1，G 含有生成树 T，由定理2.5对于 $e\in E(G)\setminus E(T)$，$T+e$ 中存在包含 e 的圈 $C(e)$，显然当 $e\neq e'\in E(G)\setminus E(T)$ 时，$C(e)\Delta C(e')\supseteq\{e,e'\}$，故 $C(e)\neq C(e')$。所以 $E(G)\setminus E(T)$ 中每一边 e 与 $C(e)$ 一一对应。由定理 2.2，$\varepsilon(T)=\nu-1$，于是 $\varepsilon(G-E(T))=\varepsilon-\nu+1$，所以 G 中至少包含 $\varepsilon-\nu+1$ 个不同的圈，故 G 连通时上述命题成立。对于 G 不连通情况，只需分别考虑 G 的每一分支，然后将各分支所得的不同的圈个数相加起来，即得结论。

2.2.6 证明：

(a) 若 G 中每个顶点的度均为偶数，则 G 没有割边。

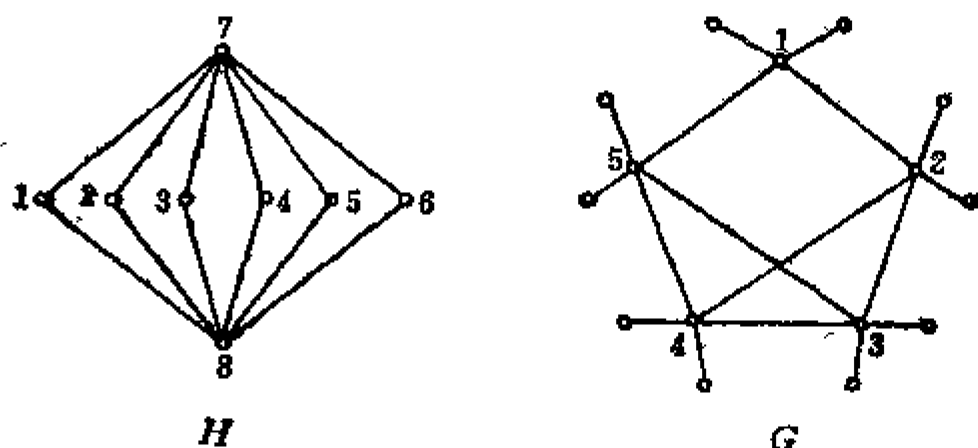
(b) 若 G 为 $k\geq 2$ 的 k-正则 2-部图。则 G 没有割边。

证：(a) 用反证法，若 G 中存在割边 e，取 $G-e$ 中含 e 的一个端点 u 的连通分支记为 G_1，则 G_1 中除 u 的度数为奇数外，其余顶点均为偶数。这和系 1.1 矛盾。故 G 中不含割边。

(b) 用反证法，设 e 是 G 中的一割边，取 $G-e$ 的一个

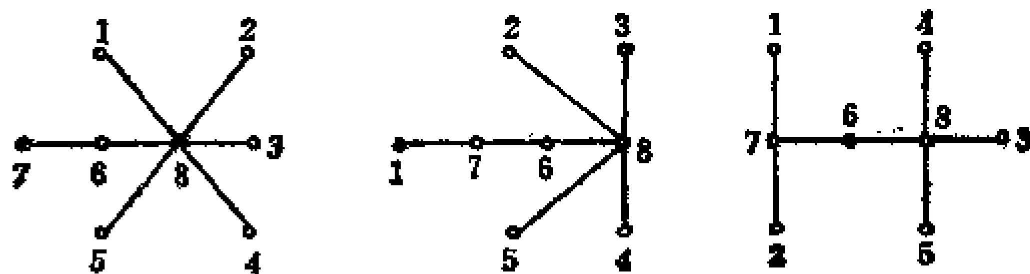
分支 G_1，它仍为2-部图，且除一点的度为 $k-1$ 外，其余的点的度仍为 k，该 G_1 的2-部顶点数分别为 m，n，于是我们有 $km-1=kn$。但当 $k\geq 2$ 时，上述等式不可能成立，矛盾．故 G 中无割边。

2.2.7 求图 H，G 中非同构的生成树的数目。



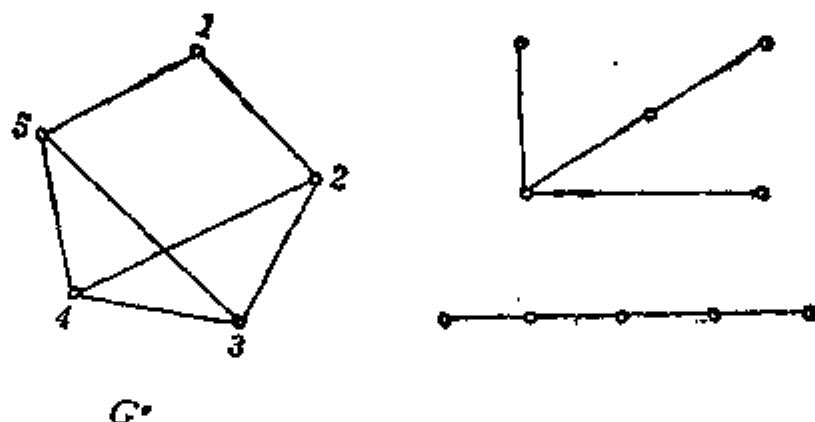
2.2.7 题 图

解：(a) 图 H 中 1，2，…，6 顶点的地位是对称的．7，8 两顶点地位亦是对称的，且 1，2，…，6 顶点在生成树中不是和 7 相连，就是和 8 相连．另外在同构意义下，不失一般性可以假定67，68在生成树上．于是图 H 共有三个非同构的生成树，如图所示。



2.2.7 (a) 图

(*b*) 由定理 2.3 知，和度为 1 的顶点相关联的边，恒在生成树中。故 G 的非同构的生成树棵数等于 G' 中非同构的生成树棵数。对于 G' 的非同构的生成树，易直接验证仅如图所示的二种。故 G 的非同构的生成树棵数为 2。



2.2.7 (*b*) 图

2.2.8 设 G 连通，S 是 $V(G)$ 的非空真子集，证明边割集 $[S, \bar{S}]$ 为 G 的键的充要条件是 $G[S]$ 与 $G[\bar{S}]$ 都是连通的。

证：易知，$G-[S, \bar{S}]=G[S]\cup G[\bar{S}]$，$\omega(G-[S, \bar{S}])=\omega(G[S])+\omega(G[\bar{S}])$。又 G 连通，$\omega(G)=1$。

$\Rightarrow$：$[S, \bar{S}]$ 是键，$\omega(G-[S, \bar{S}])=\omega(G)+1=2$。

$\omega(G[S])+\omega(G[\bar{S}])=2$。故 $\omega(G[S])=\omega(G[\bar{S}])=1$。

故 $G[S]$，$G[\bar{S}]$ 都是连通的。

$\Leftarrow$：$G[S]$，$G[\bar{S}]$ 连通，$\omega(G[S])=\omega(G[\bar{S}])=1$。$\omega(G-[S, \bar{S}])=\omega(G[S])+\omega(G[\bar{S}])=\omega(G)+1$，故 $[S, \bar{S}]$ 是键。

2.2.9 证明 G 的任一非空边割集是 G 的两两不相交的

键的并集。

证：设$[S, \overline{S}]$是G的非空边割集。分两种情况证明如下：

(1) 当G是连通的。

考虑$G[\overline{S}]$的各连通分支。设各分支的顶点集是H_i，又$G-H_i$的各连通分支为G_{ij}。由于G连通，H_i与各分支G_{ij}有边相连，故$G[\overline{V(G_{ij})}]$连通。依练习2.2.8知$[V(G_{ij}), \overline{V(G_{ij})}]$是个键。显然，这些键互不相交。

又：$\bigcup\limits_{i,j}[V(G_{ij}), \overline{V(G_{ij})}]=\bigcup\limits_{i,j}[V(G_{ij}), H_i]$

$=\bigcup\limits_i [\overline{H}_i, H_i]=\bigcup\limits_i [S, H_i]=[S, \overline{S}]$。得证。

(2) 当G不连通。

设$G^{(k)}$是G的一个连通分支，$S_k=V(G^{(k)})\cap S$，$\overline{S}_k^{(k)}=V(G^{(k)})\setminus S_k$，$\overline{S}_k=V(G)\setminus S_k$。显然有：

$$[S, \overline{S}]=\bigcup_k[S_k, \overline{S}_k^{(k)}]=\bigcup_k[S_k, \overline{S}_k], \qquad (*)$$

若$[S_k, \overline{S}_k^{(k)}]$是$G^{(k)}$中的键，则有：

$$\omega(G^{(k)}[S_k])+\omega(G^{(k)}[\overline{S}_k^{(k)}])=\omega(G^{(k)}-[S_k, \overline{S}_k^{(k)}])$$

$$=\omega(G^{(k)})+1=2,$$

$$\omega(G-[S_k, \overline{S}_k])=\omega(G[S_k])+\omega(G[\overline{S}_k])$$

$$=\omega(G^{(k)}[S_k])+\omega(G^k[\overline{S}_k^{(k)}])+\omega(G-V(G^{(k)}))$$

$$=2+\omega(G)-1=\omega(G)+1$$

故$[S_k, \overline{S}_k]$也是G中的键。若$[S_k, \overline{S}_k^{(k)}]$不是$G^{(k)}$中的键，由(1)知，边割集$[S_k, \overline{S}_k]$可分解为$G^{(k)}$中，从而也是$G$中两两不相交的键的并集。故由$(*)$知，结论也成立。

2.2.10 设 B_1, B_2 都是键, C_1, C_2 是圈(看作是边的集合)证明:

(a) $B_1 \Delta B_2$ 是不相交的键的并。

(b) $C_1 \Delta C_2$ 是不相交的圈之并。

(c) 对于任意的边 e, $(B_1 \cup B_2) \setminus \{e\}$包含一个键。

(d) 对于任意的边 e, $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$包含一个圈。

证: (a) 设 $B_1 = [S_1, \bar{S}_1]$, $B_2 = [S_2, \bar{S}_2]$, 则:

$B_1 \Delta B_2 = [S_1, \bar{S}_1] \Delta [S_2, \bar{S}_2] = [S_1 \Delta S_2, \overline{S_1 \Delta S_2}]$

故它是一个边割集。由练习2.2.9知, 结论成立。

(b) 显然子图 $C_1 \Delta C_2$ 上顶点的度均为 2 或 4, 由练习1.7.2知, $C_1 \Delta C_2$ 中含有圈 C'_1。且子图$(C_1 \Delta C_2) \setminus C'_1$ 上顶点的度仍为 2 或 4 (除孤立顶点外), 如此继续下去, 可得不相交的圈 C'_1, C'_2, …, C'_n 使得,

$$C_1 \Delta C_2 = \bigcup_{i=1}^{n} C'_i.$$

(c) 若 $e \notin B_1 \cap B_2$, 不失一般性, 假定 $e \notin B_1$, 则 $(B_1 \cup B_2) \setminus \{e\} \supseteq B_1$。若$e \in B_1 \cap B_2$,则$(B_1 \cup B_2) \setminus \{e\} \supseteq B_1 \Delta B_2$, 由($a$)知它包含 G 的键。故对任意 e, $(B_1 \cup B_2) \setminus \{e\}$恒含有 G 的键。

(d) 若 $e \notin C_1 \cap C_2$, 不失一般性, 假定 $e \notin C_1$, 则 $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \supseteq C_1$。

若 $e \in C_1 \cap C_2$,则$(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \supseteq C_1 \Delta C_2$, 由($b$)知它包含 G 的圈。故对任意 e, $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$恒含有 G 的圈。

2.2.11 证明: 若 G 包含 k 个边不相交的生成树,则对

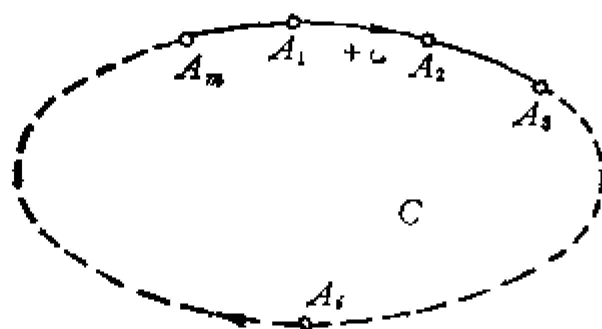
$V(G)$的每一分划$(V_1, V_2, \cdots, V_n)$，边的两端点属于分划里的不同部分的边数至少是$k(n-1)$条。(W.T.Tutte和C.St.J.A. Nash-Williams分别于1961年证明了上述条件亦是充分的)。

证：因为任一个生成树T，均把这n个部分连接起来，从而T中至少含$n-1$条边的两端点分属于分划里的不同部分。由已知条件，G中包含k个边不相交的生成树，故G中至少包含$k(n-1)$条边，它的两端点分属于分划里的不同部分。

2.2.12 设S是n个元素的集合，$A=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是$S$的$n$个不同的子集的簇。证明：存在一个元素$x \in S$，使得集合$A_1 \cup \{x\}$，$A_2 \cup \{x\}$，$\cdots$，$A_n \cup \{x\}$均相异。

证：定义标号图G如下，其顶点为$A_1, A_2, \cdots, A_n$。顶点A_i，A_j连以边并附以标号a，当且仅当$A_i = A_j \cup \{a\}$或$A_j = A_i \cup \{a\}$。设H是G的任意子图，记$L(H)$为H中边上的标号的集合。若F是G的极大森林，我们证明有$L(F) = L(G)$成立。对G中任一圈C，给一个定向，若$A_iA_j \in C$，$A_i = A_j \cup \{a\}$，记$A_i \xrightarrow{-a} A_j$或$A_j \xrightarrow{+a} A_i$，其中箭头方向是C的某一定向。如图，按边的定义，显然$+a$，$-a$在C中必成对地出现。这是因为$a \in A_m$，否则按边的定义$A_m = A_2$，这和$A_i \neq A_j$相矛盾。因而，从A_1沿C的定向走到A_m时，由A_1到A_2加上去的a，必然被减去了，故C上的边的标号恒偶数次出现。从而在C上除去任何一条边e，有$L(C) = L(C-e)$。多次地应用这结论，由定理2.5及

练习 2.2.4(a)，易知 $L(F)=L(G)$成立。再由练习2.2.4(b)，我们有 $|L(G)|=|L(F)|\leqslant n-1$，故 $S\setminus L(G)$非空，设 $x\in S\setminus L(G)$，则这 x 即为所求。事实上，若 A_i，A_j 不相邻，则 A_i，A_j 至少有二个元素相异，故 $A_i\cup\{x\}$，$A_j\cup\{x\}$仍相异；若 A_i，A_j 相邻，此时 $A_i=A_j\cup\{a\}$或 $A_j=A_i\cup\{a\}$，$a\in L(G)$，而 $x\notin L(G)$，$a\neq x$，故 x 或同时含于 A_i，A_j 之中；或均不含于 A_i，A_j 之中，不管何种情况 $A_i\cup\{x\}$和 $A_j\cup\{x\}$恒相异。



2.2.12 图

2.3 割　　点

定义：$v\in V(G)$称为**割点**，如 $E(G)$能被分成两个非空子集 E_1，E_2，使得 $G[E_1]$，$G[E_2]$恰好以 v 为公共顶点。

显然，若 G 无环且非平凡，则 v 是割点的充要条件是 $\omega(G-v)>\omega(G)$。

定理2.7　v 是树的顶点，则 v 是割点当且仅当$d(v)>1$。

系2.7　每个非平凡的无环连通图，至少有两个顶点不是割点。

2.3.1　设 G 是 $v\geqslant3$ 的连通图，证明：

(a) 若 G 有割边，则存在顶点 v，使得 $\omega(G-v)>\omega(G)$；

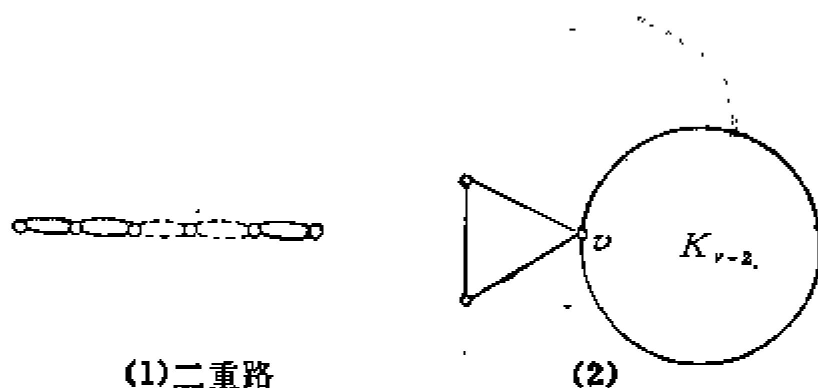
(b) (a)的逆未必成立。

证：(a) 设 $e=uv\in E(G)$是 G 中的割边，则按定义 $\omega(G-e)>\omega(G)=1$。故 $G-e$ 包含 2 个分支 G_1、G_2。由于 $\nu\geqslant 3$，故不失一般性，可假定 $v\in G_2$，$|V(G_2)|\geqslant 2$。

显然 $G-v=G_1\cup(G_2-v)$，且 $G_1\cap(G_2-v)=\Phi$，

故 $\omega(G-v)\geqslant 2>1=\omega(G)$。

(b) 其反例如图：



2.3.1 (b) 图

2.3.2　证明恰有两个非割点的连通单图是一条路。

证：设 G 是满足条件的单图，它有 $\nu-2$ 个割点，故 G 的任一生成树 T 也至少有 $\nu-2$ 个割点，即 T 至多有 2 个非割点；于是，由系 2.7 知，T 恰有 2 个非割点。由定理 2.7 知，这 2 个非割点在 T 中的度为 1 。再由练习 2.1.4 知，T 是一条路。故 G 的任意生成树都是路。这样的单图只有两种，圈或路。但圈的非割点多于两个，与条件矛盾，于是G 只能是路。

2.4 Cayley公式

定义：设 $e\in E(G)$，将 e 从 G 中除去并将 e 的两端点重合在一起的运算称为**收缩**，经收缩边 e 后所得的图记为$G\cdot e$。

定义：记 $\tau(G)$是 G 中的生成树棵数。

定理2.8 若e是G的杆，则 $\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)$。

定理2.9 $\tau(K_n)=n^{n-2}$。

2.4.1 利用定理 2.8 的递推公式，求 $K_{3,3}$ 中生成树的棵数。

解：下面图中生成树棵数象征地由图本身来代表，且由于环不会影响生成树的棵数，故在图中略去。

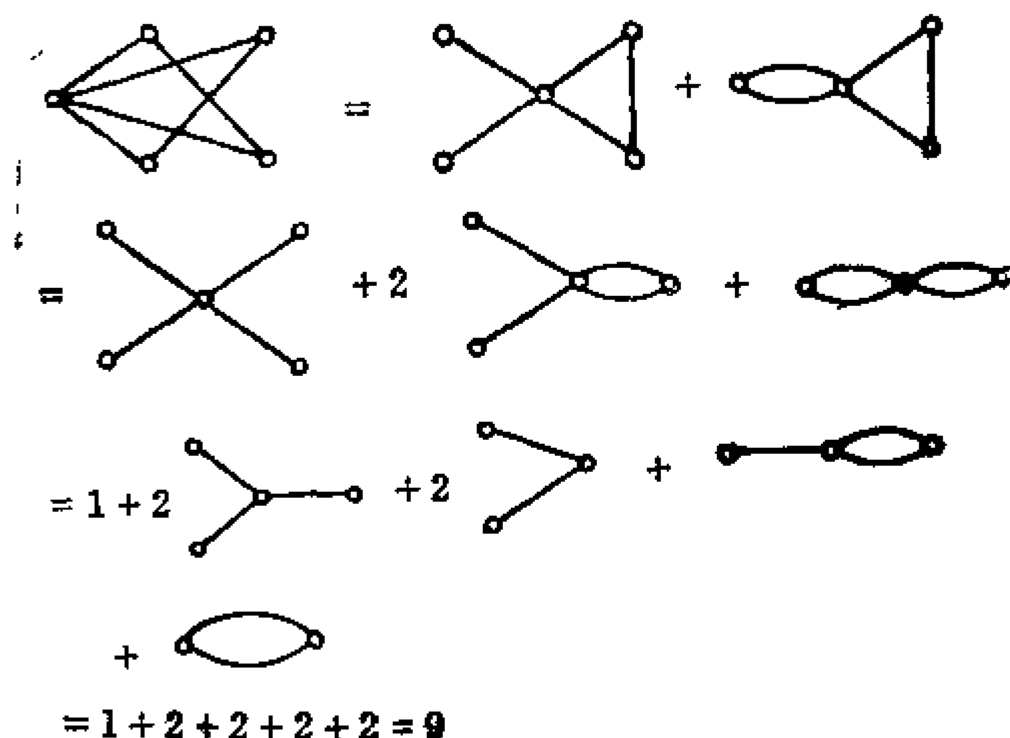
$\tau(K_{3,3})$ = +

= +2 +

= +3 +3

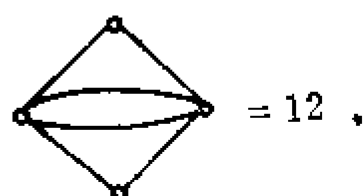
+

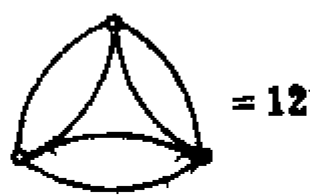
而 $\tau(C_6)=6$：



$=1+2+2+2+2=9$

同理





所以 $\tau(K_{3,3})=6+3\times9+3\times12+12=81$。

2.4.2 **轮**是由圈添加一个新顶点(称为**轮心**)，且在圈上的每一个顶点到新顶点之间连以边(称为轮的**辐**)所得之图。试求有 n 条辐的轮的生成树的棵数表达式。

解：令 W_n 记 n 条辐的轮的生成树的棵数，下面图解中，仍和原书中一样象征地由图本身来代表其生成树的棵数，且由于环和悬挂边不影响生成树的棵数，故在图中略去。

应用定理 2.8 甚易直接验证，$W_3=16$；$W_4=45$；$W_5=121$。

当 $n\geqslant 6$ 时，可以证明 W_n 间有如下递归关系：

$$W_n - 4W_{n-1} + 4W_{n-2} - W_{n-3} = 0$$

下面我们来证明它：

$W_n =$ （n） $=$ （$n-1$） $+$ （$n-1$）

而 （$n-1$） $= W_{n-1} +$ （$n-1$）

$= 2W_{n-1} -$ （$n-2$）

$= 2W_{n-1} - W_{n-2} -$ （$n-3$）

$= 2W_{n-1} - 2W_{n-2} +$ （$n-3$）

$$= \quad (n-1) \quad = \quad (n-1) \quad + \quad (n-2)$$

$$= \quad (n-2) \quad + 2 \quad (n-2)$$

$$= \quad (n-2) \quad + 2\left(W_{n-1} - (n-2)\right)$$

$$= \quad (n-2) \quad + \quad (n-3)$$

$$+ 2W_{n-1} - 2\left((n-2) \quad + W_{n-2}\right)$$

$$= 2W_{n-1} - 2W_{n-2} - \quad (n-2) \quad + \quad (n-3)$$

$$= 2W_{n-1} - 2W_{n-2} - \quad (n-3)$$

故

$$W_n=\left(2W_{n-1}-2W_{n-2}+\ (n-3)\ \right)$$

$$+\left(2W_{n-1}-2W_{n-2}-\ (n-3)\ \right)$$

$$=4W_{n-1}-4W_{n-2}+\ (n-3)\ -\ (n-3)$$

$$=4W_{n-1}-4W_{n-2}+\left(W_{n-3}+\ (n-3)\ \right)-\ (n-3)$$

$$=4W_{n-1}-4W_{n-2}+W_{n-3}$$

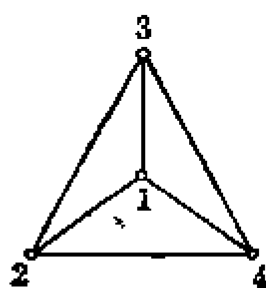
所以递归关系成立。

上述线性递归关系的特征多项式及其因子分解如下：

$$\lambda^n-4\lambda^{n-1}+4\lambda^{n-2}-\lambda^{n-3}=\lambda^{n-3}(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\lambda-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

故$W_n=C_1+C_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$，并由$n=3$、4、5可得$C_1=-2$，$C_2=C_3=1$。从而

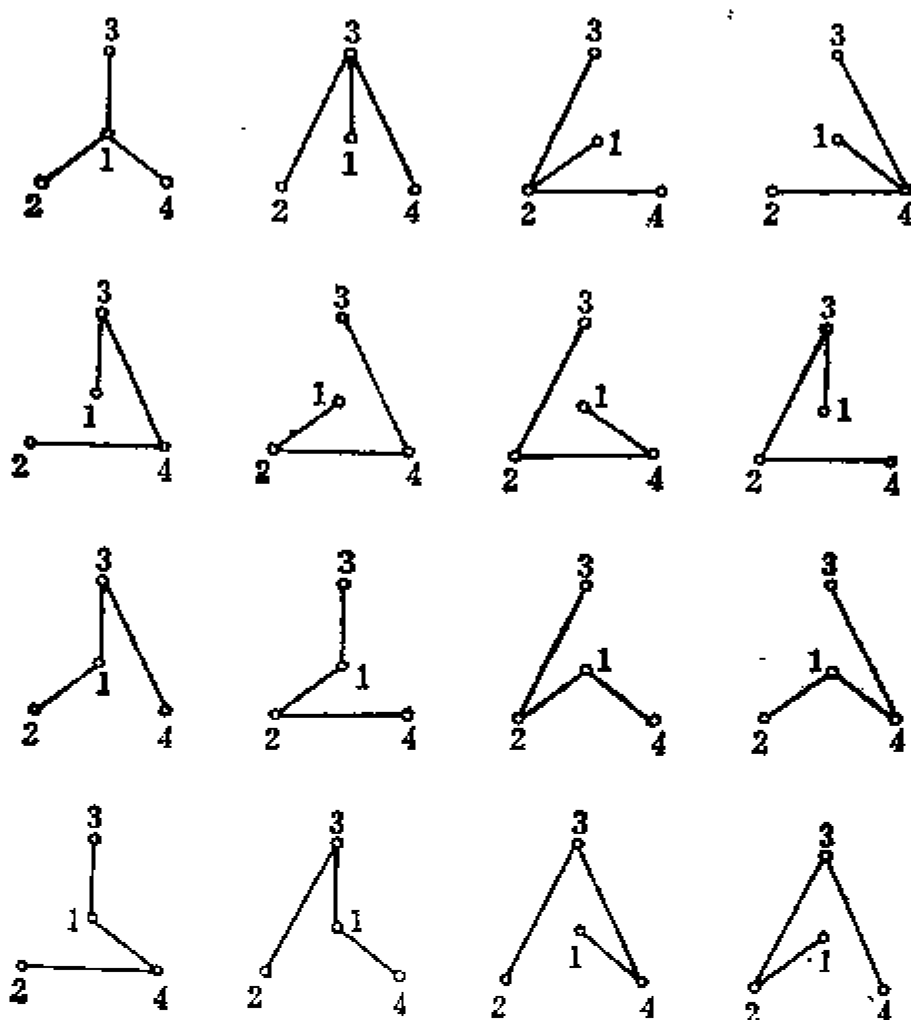
$$W_n=-2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n。$$



2.4.3图

2.4.3 画出 K_4 的所有16棵生成树。

解： K_4 的顶点标号及它的16棵生成树如图：



2.4.4 证明：若 e 为 K_n 的一条边，则 $\tau(K_n-e)=(n-2)n^{n-3}$。

证：由定理 2.9，$\tau(K_n)=n^{n-2}$。K_n 的生成树均由 $n-1$ 条边组成．由对称性，K_n 中每条边在它所有的生成树中恰出现了$(n-1)n^{n-2}/\frac{1}{2}n(n-1)=2n^{n-3}$次．
所以 $\tau(K_n-e)=n^{n-2}-2n^{n-3}=(n-2)n^{n-3}$．

2.4.5 (a) 设 H 为任意两相邻顶点间连以 k 条边的图，G 是 H 的单底图。证明 $\tau(H)=k^{\nu-1}\tau(G)$．

(b) 设 H 是由 G 将每条边用长度为 k 的路来代替得到的图。证明 $\tau(H)=k^{\varepsilon-\nu+1}\tau(G)$。

(c) 从(b)推出 $\tau(K_{2,n})=n2^{n-1}$．

证：(a) G 中每一棵生成树计有 $\nu-1$ 条边，而每条边对应在 H 中共有 k 种取法，故 G 中一棵树，对应在 H 中相应地有 $k^{\nu-1}$ 棵树．所以 $\tau(H)=k^{\nu-1}\tau(G)$。

(b) 从 G 变到 H 时，G 中的生成树对应到 H 中并不是 H 的生成树。一般还要加上 G 中的生成树所产生的余树中每边对应在 H 中的路上的 $k-1$ 条边．从 k 边中取 $k-1$条边一共有 k 种取法，而 G 的每棵余树均有 $\varepsilon-(\nu-1)$条边．从而 G 中的一棵生成树，对应在 H 中产生 $k^{\varepsilon-\nu+1}$ 棵不同的生成树．故 $\tau(H)=k^{\varepsilon-\nu+1}\tau(G)$．

(c) $K_{2,n}$ 可以看成是由二个顶点连以 n 条边的多重图 G 的每边以一个长度为 2 的路代替所产生的图，从而由(b)，$\tau(K_{2,n})=2^{n-2+1}\tau(G)=n2^{n-1}$．

2.5 连接问题

定义：权图中的最小权生成树(支撑树)称为**最优树**。

Kruskal算法：

1．选择一根杆 e_1，使得 $w(e_1)$尽可能小。

2．若边 $e_1, e_2, \cdots, e_i$ 已经选好，则从

$$E\setminus\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$$

中依照使：

(i) $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{i+1}\}]$为无圈图。

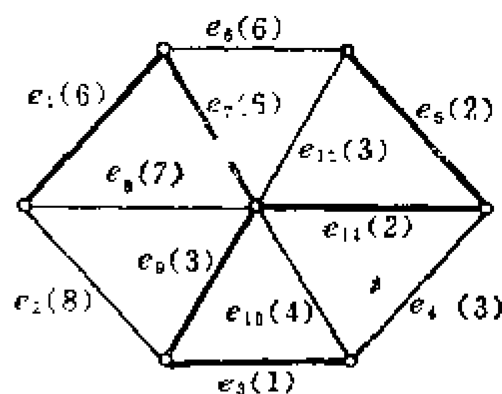
(ii) 满足(i)的条件下，使 $w(e_{i+1})$尽可能小的原则来选 e_{i+1}。

3．当第 2 步不能再执行时停止。

定理2.10 由 Kruskal 算法构造的任一支撑树 $T^*=G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{v-1}\}]$都是最优树。

2.5.1 用Kruskal 算法验证图中所指出的树(粗边)实际上是最优的。

证：图中边标号旁( )中的数字表示边所赋的权。易验证粗边所示的生成树 $T=G[\{e_3, e_5, e_{11}, e_9, e_7, e_1\}]$ 恰是由 Kruskal 算法，按所示的顺序构造出来的。故由定理2.10，T 是2.5.1图的最优树。



2.5.1图

2.5.2 修改Kruskal算法，使适用预求解预先指定的连接问题：用最小费用建造一个连接若干城镇的网络，且要求某些指定的城镇对之间是直接连接的。

解：设 E_k 是预先指定的 k 对城镇之直接连边的集合，它们是一定要建造的。由于 $G[E_k]$ 不一定是无圈的，我们不能从 E_k 开始施行 Kruskal 算法；但可在 $G[E_k]$ 的每个分支上使用求生成树的算法，然后在 G 上从 $G[E_k]$ 的生成森林开始使用Kruskal 算法。结果选到的 $\nu-1$ 条边与 E_k 的并，就是这一问题的解。根据这一想法，算法如下：

1. 在 E_k 中选择一条杆 e_1；

2. 若已选好边 $e_1, \cdots, e_i$，则从 $E_k\setminus\{e_1,\cdots,e_i\}$ 中选取 e_{i+1}，使 $G[\{e_1, \cdots, e_i, e_{i+1}\}]$ 是无圈的，

3. 当第 2 步不能继续执行时，转第 4 步，

4. 若已选好边 $e_1, \cdots, e_j$，则从 $E\setminus\{e_1,\cdots, e_j\}$ 中选取 e_{j+1}，使得

   (i) $G[\{e_1, \cdots, e_j, e_{j+1}\}]$ 是无圈的。

   (ii) $w(e_{j+1})$ 是满足(i)的条件下尽可能小的权，

5. 当第 4 步不能继续执行时，停止。求出的 $\nu-1$ 条边与 E_k 的并。即是解。

2.5.3 Kruskal算法能否用来：

(*a*) 在赋权的连通图中求最大权树？

(*b*) 在赋权图中求最小权的极大林？

如果可以，怎样求呢？

解：对于(*a*)和(*b*)都可以用 Kruskal 算法。具体用法是，对(*a*)有两种方法：

(i) 把 Kruskal 算法中的“小”字换为“大”字。

(ii) 重新规定图的权为：

$$w'(e)=\begin{cases}\dfrac{1}{w(e)} & \text{当 } w(e)\neq 0\\ M(\text{充分大}) & \text{当 } w(e)=0\end{cases}$$

这样就可直接用 Kruskal 算法。

对于(b)，只需对 G 的每一分支施行 Kruskal 算法。

2.5.4 证明，下述 Kruskal 型算法，在赋权连通图中未必求出最小权支撑路：

1. 选择一根杆 e_1，使得 $w(e_1)$尽可能小。

2. 若边 $e_1, e_2, \cdots, e_i$ 已选好，则从 $E\setminus\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中选一条边 e_{i+1}，使得

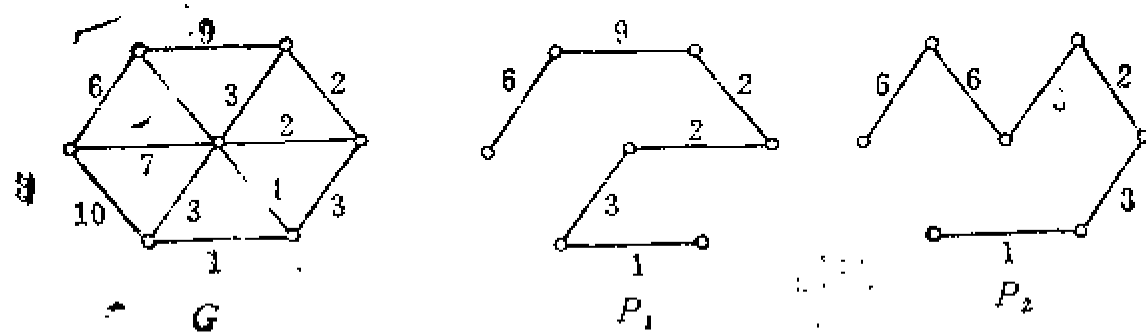
   (i) $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{i+1}\}]$是不交路的并；

   (ii) 满足(i)的条件下，使 $w(e_{i+1})$尽可能小。

3. 当第 2 步不能再执行时停止。

证：赋权图 G 如图。

由题给的算法和不按该算法得出的支撑路 P_1，P_2 分别如图。



2.5.4 图

但$w(P_1)=23>21=w(P_2)$，说明题中给的算法在赋权

连通图中未必求出最小权支撑路。

2.5.5 连通图 G 的树图是一个图，它的顶点为 G 的生成树 T_1，T_2，…，T_τ；T_i 与 T_j 相连的充要条件是它们恰好有 $\nu-2$ 条公共边。证明任何连通图的树图都是连通的。

证：对任意两株生成树 T_i，T_j，设 T_i，T_j 已有 k 条公共边：$\{e_1, \cdots, e_k\}(k<\nu-2)$，而有 $\nu-1-k$ 条边不相同。这时存在边 $e'_{k+1}\in E(T_i)$但$e'_{k+1}\notin E(T_j)$。从而$T_j+e'_{k+1}$ 有唯一的圈，圈中存在 $e_{k+1}\in E(T_j)$，使 $e_{k+1}\notin E(T_i)$，且 $T_i-e'_{k+1}+e_{k+1}=T_{i+1}$仍是 G 的生成树。否则，T_i 中有圈，这与 T_i 是树矛盾！

易知 T_i 与 T_{i+1} 恰有 $\nu-2$ 条公共边，在树图上它们有边相连。且 T_{i+1} 与 T_j 的公共边比 T_i 与 T_j 的公共边多了一条。再对 T_{i+1} 如法泡制，增加与 T_j 的公共边数，总可达到与 T_j 只有一条不同边的树 $T_{i+\nu-2-k}$。相应地在树图上找到了一条从 T_i 到 T_j 的路。故树图连通。

(关于树的应用，可参阅 W.K.Chen 的《Applied Graph Theory》(1971)及卢开澄《图论及其应用》(1981))。

第三章 连 通 性

3.1 连通性

定义：设G中顶点子集$V' \subseteq V$，使$G-V'$不连通则称V'是G的**顶点割集**。若$|V'|=k$，则称为**k-顶点割集**。

定义：$\kappa(G)=\min\{k \mid G$中k-顶点割集：$G \neq K_v\}$称为G的**连通度**。$\kappa(K_v)$定义为$v-1$，若G满足$\kappa(G) \geq k$，则称G是**k-连通**。

定义：$\kappa'(G)=\min\{k \mid G$中$k$-边割集$\}$，称为$G$的**边连通度**。若$G$满足$\kappa'(G) \geq k$，则称$G$是**$k$-边连通**的。

定理3.1 $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$。

(关于连通性与连通度的综合性文献，见W. Mader, Connectivity and edge-connectivity in, finite graphs, in Survey in Combinatorics, Edited by B. Bolloba's, Combridge Vniv. Press, 1979, 66—95)。

3.1.1 (a)证明：若G是k-边连通，且$k>0$，E'是G的k条边的集合，则$\omega(G-E') \leq 2$。

(b) 对$k>0$，找一个k-连通图G，及G的k个顶点的集合V'，使得$\omega(G-V')>2$。

证：(a)设$e \in E'$，则按定义$\omega((G-E') \cup e)=1$，若e

是$G_1=(G-E')\cup e$割边，则$\omega(G-E')=2$。若e不是G_1的割边，则$\omega(G-E')=1$。故结论成立。

(b)对于任意给定的$k>0$，令$G=K_k\vee(K_1+K_1+K_1)$，(联"$\vee$"的定义如下：两个不相交的图G_1与G_2的联$G_1\vee G_2$是把G_1的每个顶点与G_2的每个顶点连以边所得之图)。显然G是k-连通的，取G中属于K_k的k个顶点作为V'，则有$\omega(G-V')=3>2$。

3.1.2 证明：若G是k-边连通，则$\varepsilon\geqslant\frac{1}{2}k\nu$。

证：由定理3.1对G中任一顶点v，有
$d_G(v)\geqslant\delta\geqslant\kappa'(G)\geqslant k$，再由定理1.1，于是
$2\varepsilon=\sum\limits_{v\in V}d_G(v)\geqslant k_\nu$，故$\varepsilon\geqslant\frac{1}{2}k\nu$。

3.1.3 (a)证明：若G是单图，且$\delta\geqslant\nu-2$，则$\kappa(G)=\delta$。

(b) 找一个单图G，满足$\delta=\nu-3$，$\kappa(G)<\delta$。

解：(a)证：当$\delta=\nu-1$时，$G=K_\nu$，故$\kappa(G)=\nu-1=\delta$。当$\delta=\nu-2$时，若v_1，$v_2\in V(G)$不相邻，则对任意第三点$v_3\in V(G)$，都有v_1v_3，$v_2v_3\in E(G)$。这时，对任意$\nu-3$个顶点的子集V'，均有$G-V'$仍连通。故$\kappa(G)\geqslant\nu-2=\delta$，再由定理3.1即得$\kappa(G)=\delta$。

(b)对$\nu\geqslant4$，作

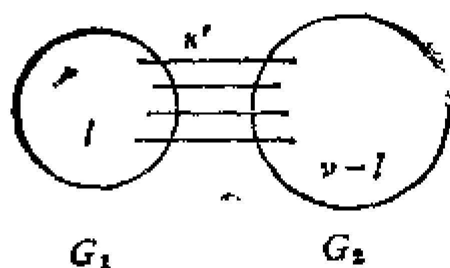
$$G=\begin{cases}K_2+K_2 & (\text{当}\nu=4)\\ K_{\nu-4}\vee(K_2+K_2) & (\text{当}\nu>4)\end{cases}$$

易知：$\nu=4$时，$\kappa(G)=0<\delta(G)=1$。$\nu>4$时，$K_{\nu-4}$中的$\nu-4$个顶点构成G的顶点割集，故$\kappa(G)\leqslant\nu-4<\nu-3=\delta(G)$。

3.1.4 (*a*)证明：如果G是单图且$\delta \geqslant \nu/2$，则$\kappa'(G)=\delta$。

(*b*)找一个$\delta=[\nu/2-1]$且$\kappa'(G)<\delta$的单图。

证：(*a*)如图按κ'的定义，存在κ'条边，除去后把G分成两个分支。不失一般性，假定$|V(G_1)|=l\leqslant\nu/2$，显然$\delta\geqslant\nu/2\geqslant l$，故



3.1.4 (a) 图

$\delta(l-1)\geqslant l(l-1)$，即$[\delta-(l-1)]l\geqslant\delta$。另一方面$G_1$中每个顶点至少有$\delta-(l-1)$条边伸向$G_2$，故$\kappa'(G)\geqslant[\delta-(l-1)]l\geqslant\delta$，再由定理3.1，$\kappa'=\delta$。

(*b*)在$K_{[(\nu+1)/2]}$上取一点u，$K_{\{(\nu-1)/2\}}$上取一点v。连u、v一条边e，所得之图记为G，即

$G=(K_{[(\nu+1)/2]}\cup K_{\{(\nu-1)/2\}})+uv$，

其中$u\in V(K_{[(\nu+1)/2]})$，$v\in V(K_{\{(\nu-1)/2\}})$

显然，$e=uv$是G的割边，$\kappa'(G)=1$，在$\nu\geqslant6$的条件下，$\delta(G)=\{(\nu-1)/2\}-1=[\nu/2-1]>1=\kappa'(G)$。

3.1.5 证明：若G为满足$\delta\geqslant\frac{1}{2}(\nu+k-2)$的单图，则$G$是$k$-连通的。[注]

证：在G中除去任意的$k-1$个顶点，所得之图记为G_1。则$\delta(G_1)\geqslant\delta-(k-1)\geqslant\frac{1}{2}(\nu+k-2)-(k-1)=\frac{1}{2}(\nu-k+2)-1=\frac{1}{2}(\nu(G_1)+1)-1>\frac{1}{2}\nu(G_1)-1$，由练习1.6.6知，$G_1$连通，从而知$G$是$k$-连通。

[注]按定义$\kappa(K_\nu)=\nu-1$，从而对$k=\nu$时，$\delta\geqslant\nu-1$的情况，即G是K_ν的情况，要相应地把结论中的ν-连通换成

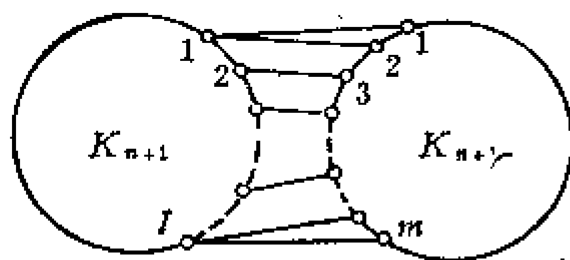
$(\nu-1)$连通。

3.1.6 若G是3-正则单图，则$\kappa=\kappa'$。

证：① 若$\kappa=0$，则G不连通，故$\kappa'=0$，所以$\kappa=\kappa'$。②若$\kappa=1$，则存在$v\in V(G)$，$G-v$不连通，由于$d_G(v)=3$，从而至少存在一个分支仅一条边和v相关联。显然这边为G的割边，故$\kappa'=1$，所以$\kappa=\kappa'$。③$\kappa=2$，设v_1，$v_2\in V(G)$，$G-\{v_1, v_2\}$不连通，$G_1=G-v_1$连通。则v_2是G_1的割点且$d_{G_1}(v_2)\leqslant 3$，类似于②知在G_1中存在一割边e_2（关联于v_2）使G_1-e_2不连通。另一方面由定理3.1 $\kappa'\geqslant\kappa=2$，故$G-e_2$连通。由于$G_1-e_2=(G-e_2)-v_1$，故v_1是$G-e_2$的割点，且$d_{G-e_2}(v_1)\leqslant 3$。于是类似于②知，在$G-e_2$中存在一割边$e_1$，即$(G-e_2)-e_1=G-\{e_1, e_2\}$不连通，故$\kappa'=2$。所以$\kappa=\kappa'$。④$\kappa=3$，由定理3.1知，$\kappa'=\kappa=3$。由于$\delta=3\geqslant\kappa\geqslant 0$，我们已穷举了$\kappa'$的一切可能情况，故综合上述，结论成立。

（注：值得注意，在证明过程中仅用到$\Delta\leqslant 3$这条件，从而对于$\Delta\leqslant 3$的单图成立$\kappa=\kappa'$。）

3.1.7 证明：若l，m，n是满足$0<l\leqslant m\leqslant n$的整数，则存在一个单图满足$\kappa=l$，$\kappa'=m$，$\delta=n$。(G.Chartrand和F.Harary)



3.1.7 图

证：我们用构造的方法来证明。如图中的两个圈表示两个K_{n+1}。在一个K_{n+1}上取出l个点，另一个K_{n+1}上取出m个点，并在其间连以m条边，使得左边l个点，每点至少加一边，右边的m个点，每点恰好加一边。所得之图，满足题目要求。

3.2 块

定义：一个无割点之连通图称为**块**。

定义：图G的一个子图G_1，它是块，且G中不存在包含G_1的更大的块，则称G_1是**G的块**。

定理3.2 $\nu\geqslant 3$的图G是2-连通的充要条件是G的任意两个顶点都最少由两条内部不相交的路所连通。

系3.2.1 若G是2-连通的，则G的任意两个顶点都在某个圈上。

系3.2.2 若G是$\nu\geqslant 3$的块，则G的任意两条边都在每个圈上。

3.2.1 证明，图G为2-边连通的充要条件是任意两点都最少由两条边不相交的路所连通。

证：$\Leftarrow$：若G中任意两点都最少由两条边不相交的路所连通，显然对任意$e\in E(G)$，$G-e$是连通的，故G为2-边连通。

$\Rightarrow$：若G为2-边连通，则G无割边。将G分解成块，于是，G中每一顶点至少属于一个块。这些块的顶点数不少于3，且块与块之间以G中的割点相互连接。今对G中任意两顶

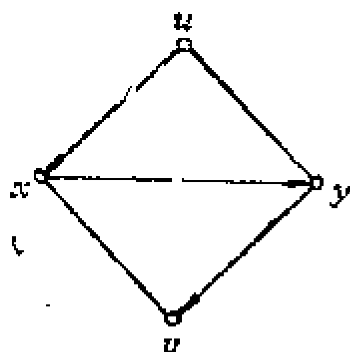
点u, v；若u，v同属于G的某一块，则由定理3.2知，结论成立。若u，v属于G的不同块。为叙述方便令$u\in B_1$，B_2，…，$B_n\ni v$，其中块B_i和B_{i+1}以割点v_i相互连接且$\nu(B_i)\geqslant 3$。由定理3.2知，在B_1中存在两条由u到v_1的不相交的路P_{11}，P_{12}；在$B_i(i=2, 3, \cdots, n-1)$中存在两条由v_{i-1}到v_i的不相交的路P_{i1}，P_{i2}；在B_n中存在两条由v_{n-1}到v的不相交的路P_{n1}，P_{n2}。于是我们找到了两条由u到v的边不相交的路如下：$P_{11}\cup P_{21}\cup\cdots\cup P_{n1}$和$P_{12}\cup P_{22}\cup\cdots P_{n2}$。

3.2.2 举例来证明：若P是一条2-连通图中的(u, v)-路，则G未必包含另一条与P内部不相交的(u, v)-路Q。

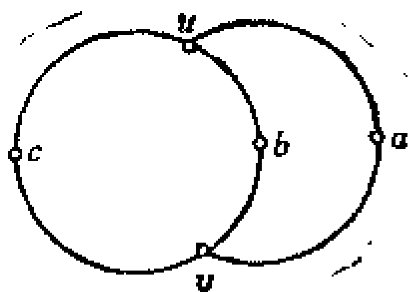
解：如下页图示它是2-连通图。P路为$u\,x\,y\,v$，则图中无与P内部不交的(u, v)-路了。

3.2.3 证明：若G不含偶圈，则G的块或是K_2或是奇圈。

证：G因无偶圈，必无孤立点和重边，故1点的块是1-圈，2点的块是K_2。于是命题只需对G中多于两点的2-连通块B，证明是奇圈。由系3.2.2知，B中有圈，设C是B中的一个圈，$c\in V(C)$。若C外还存在B中之顶点a，则由系3.2.2知，在B中存在一个包含c、a的圈$\tilde{C}$，由顶点a出发，沿$\tilde{C}$的两个方向前进，它们恒与C相交，设和C相交的第一个交点分别记为u，v，如图。由条件C是奇圈，故u-c-v，u-b-v路中有一条奇数长的路，另一条是偶数长路，故不论u-a-v路长度奇偶性如何，u-c-v-a-u，u-b-v-a-u，二圈中恒有一个是偶圈，这和假设矛盾。故C外不存在B中之顶点a，即C包含了B的所有顶点。类似可证，B中若存在e边不在C上，则同样可推出B中含有偶圈的矛盾。故$B=C$。



3.2.2 图



3.2.3 图

3.2.4 证明：一个不是块的连通图 G，至少存在两个块，它们仅包含G的一个割点。

证：当G仅有一个割点时，结论显然。当G的割点个数$\geqslant 2$时，考虑G中以割点为两端点的最长路P。若B是G中含P的端点但不含P的边的块，则B一定是仅含一个割点的块，否则就和P是最长路矛盾。由于P有两个端点，故G中至少存在两个仅含一个割点的块。

3.2.5 若$b(v)$表示G中含v的块的块数。证明：G的块数等于 $\omega+\sum\limits_{v\in V(G)}(b(v)-1)$。

证：先考虑G是连通的情况，对G中的割点数n用归纳法。由于对G的非割点v，$b(v)=1$，即$b(v)-1=0$，故对$n=0$时，G的块数为$1+\sum\limits_{v\in V}(b(v)-1)$，命题成立。假设当$n\leqslant k$ $(k\geqslant 0)$时命题成立。对$n=k+1$的情况，任取G的一个割点a，可将G分解为连通子图G_i，使得a在G_i中不是割点，a又是G_i的唯一公共点。这样，每一G_i，有且只有一个块含有a，若这些G_i共有r个，则$b(a)=r$，又显然G_i的块亦是G的块，且G_i的割点数$l_i\leqslant k$。故由归纳法假设G_i的块的块数为

$1+\sum_{v\in V(G_i)}(b_i(v)-1)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$，这里$b_i(v)$是$G_i$中含$v$的块的块数，注意到$G_i$中异于$a$的$v$，$b(v)=b_i(v)$，而$a$在每一个$G_i$中均为非割点，故$b_i(a)=1(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$。于是$G_i$的块数为 $1+\sum_{\substack{v\in V(G_i)\\ v\neq a}}(b(v)-1)$，$(i=1,\ 2,\cdots,r)$。将它们全部加起来即得$G$的块数为

$$r+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{v\in V(G_i)\\ v\neq a}}(b(v)-1)=1+\sum_{v\in V(G)}(b(v)-1)。$$

故由归纳法知，当连通时命题成立。当G有ω个分支时，我们逐个对它的分支应用上述结果，然后相加，于是G的块数为$\omega+\sum_{v\in V(G)}(b(v)-1)$。故命题成立。

3.2.6 设G是一个2-连通图，X，Y是V中不相交子集，且每个至少包含两个顶点。证明G含不相交路P和Q，使得：(i)P，Q的起点均属于X；(ii)P，Q的终点均属于Y；(iii)P，Q的内点均不属于$X\cup Y$。

证：由G加上一点x，仅和X中一切点相连，再加上一点y，仅和Y中一切点相连，所得之图记为G^*。由假设$|X|\geqslant 2$，$|Y|\geqslant 2$，故易直接验证G^*仍为2-连通图。对x、y在G^*中应用定理3.2，我们得到两条起点为x、终点为y、内部不相交的路P^*，Q^*。由x出发沿P^*走向y的过程中，P^*中最后一个属于X的顶点记为x_1，然后再由x_1继续沿P^*前进，到达第一个属于Y的顶点记为y_1，令P^*中一段$(x_1,\ y_1)$-路记为P。

类似地在Q^*中可以找到一条(x_2, y_2)-路Q，其中$x_2\in X$，$y_2\in Y$。由P^*，Q^*的内部不相交，推知P，Q不相交。故P，Q路即为所求。

3.2.7 一个非空图G，满足对任意的边e，$\kappa(G-e)<\kappa(G)$时，称G是κ-**临界**的。

(a)证明：每个κ临界的2-连通图恒有一个度为2的顶点[注]。

(R. Halin 1969年证明了一般的结果：每个κ-临界k-连通图恒有一个度为k的顶点。)

(b)证明：若G是一个κ-临界2-连通图，且$\nu\geqslant 4$，则$\varepsilon\leqslant 2\nu-4$。

[注] 本题中的2-连通定义是指$\kappa(G)=2$。

证：(a) 对ε用归纳法。当$\varepsilon=3$时，G只能是3-圈C_3，它有2度顶点，命题成立。归纳设$\varepsilon=m$时，命题成立。对于$\varepsilon=m+1$的情况，任取一边$e_1=v_1v_2$，首先我们证明$G\cdot e_1$仍是块。事实上，若$G\cdot e_1$含有割点v_3，则v_3只能是e_1收缩后所成之顶点，于是$\{v_1, v_2\}$是G的2-顶点割集。若u, v分属于$G\cdot e_1$的不同块中，则由定理3.2，在G中存在两条内部不交的(u, v)-路，分别经过v_1和v_2，又由定理3.2，$G-e_1$仍然是2-连通的，这和G是κ-临界的，矛盾！下分两种情况证明，

(1) 若$G\cdot e_1$是临界块。由$\varepsilon(G\cdot e_1)=m$，根据归纳假设$G\cdot e_1$具有一个度为2的顶点$v_0$。若$v_0$不是$e_1$收缩后之顶点，显然它在$G$中的度仍为2；若$v_0$是$e_1$收缩后所成之顶点，则$v_1$，$v_2$在$G$中只能是度为2的顶点。故此时命题成立。

(2) 若$G\cdot e_1$不是临界块。存在$e_2\in E(G\cdot e_1)$使得$(G\cdot e_1)-e_2$仍是一个块。另一方面由G的κ-临界性知，$G-e_2$

是1-连通的，存在割点。但$(G-e_2)\cdot e_1=(G\cdot e_1)-e_2$，是块。有割点的图$G-e_2$收缩边$e_1$后没有割点了，这被收缩的边$e_1$只能是$G-e_2$的悬挂边。设$e_1$的端点$v_1$在$G-e_2$中度为1，由于$G$是2-连通的，故$e_2$在$G$中必需和$v_1$相关联。于是有$d_G(v_1)=2$。故这情况下，命题也成立。

(b) 对v进行归纳法：对$v=4$，G只能是C_4，$\varepsilon(C_4)=4$，满足$\varepsilon=2v-4$，命题成立。假如$v\leqslant k$时，$\varepsilon\leqslant 2v-4$成立。现考虑$v=k+1$的情况，由(a)知$G$中存在一个顶点$v_0$，$d_G(v_0)=2$，和$v_0$关联的两边记为$e_1$，$e_2$，若$G\cdot e_1$是临界块，则由归纳法假设$\varepsilon(G\cdot e_1)\leqslant 2(v-1)-4$，故$\varepsilon(G)=\varepsilon(G\cdot e_1)+1\leqslant 2v-5<2v-4$。若$G\cdot e_1$不是临界块，显然有$e_3\in E(G\cdot e_1)$，$(G\cdot e_1)-e_3$是块，若$e_3\neq e_2$，则由$(G\cdot e_1)-e_3$是块推之$G-e_3$亦是块，这和$G$是临界的假设矛盾，故$e_3=e_2$，即$(G\cdot e_1)-e_2$是块。若$(G\cdot e_1)-e_2$不临界，则存在$e_4\in E$，$\{(G\cdot e_1)-e_2\}-e_4=(G-v_0)-e_4$是块由此推之$G-e_4$亦是块，这又和$G$是临界的假设矛盾。故$(G\cdot e_1)-e_2$是临界块。按归纳法假设，$\varepsilon((G\cdot e_1)-e_2)\leqslant 2(v-1)-4$。所以$\varepsilon(G)=\varepsilon((G\cdot e_1)-e_2)+2\leqslant 2v-4$。

3.2.8 给出一个求图的块的好算法。

解：求图G的任一生成森林F，且对每一边$e\notin F$，求$F+e$中的唯一圈，设这些圈C_1，C_2，…，$C_{\varepsilon+\omega-v}$都已求得，(这些都有好算法)。在此基础上，我们注意到，两个圈(或一个圈与一个块)若有多于1个公共点，则它们属于同一块。此外，由定理2.3知，G的任一割边不含于任何圈中，且它们都是G的块。基于这些道理，可得如下求图G的块的好算法：

1. 令$s=1$，$t=1$，$p=\varepsilon-v+\omega$。

2. 若$p>0$，输入C_1，C_2，…，C_p；否则，转第4步。

3. 若$|V(C_s)\cap V(C_{s+t})|>1$，令$C_s\leftarrow C_s\cup C_{s+t}$，且对$i=s+t$，…，$p-1$，令$C_i\leftarrow C_{i+1}$；$p\leftarrow p-1$，转第4步；否则，$t\leftarrow t+1$，转第5步。

4. 若$s<p$，令$t=1$，转第3步；否则，停（这时C_1，…，C_p与$\{E\setminus\{C_1, \cdots, C_p\}\}$中的每一边都是$G$的块）。

5. 若$s+t\leqslant p$转第3步；否则，$s\leftarrow s+1$，转第4步。

本算法除了求圈C_1，…，$C_{\varepsilon-v+\omega}$有好算法外，计算量主要在第3步，比较C_s与C_{s+t}的顶点寻找它们的公共点的运算中，这些运算不超出$v^2(\varepsilon-v+\omega)$次，故是好算法。

3.2.9 $v\geqslant3$的无环图G，且$\delta\geqslant1$，则下面陈述是等价的：

(1) G是块，即G是2-连通图；

(2) G的任意两个顶点在某个圈上，即G的任意两个顶点至少有两条内部不相交的路连通；

(3) G的任一个顶点和任一条边在某个圈上；

(4) G的任意两边在某个圈上；

(5) G的任意两个顶点u，v及任一边e，总存在连接u，v且过e的路；

(6) G的任意三个顶点，总存在连接其中任意两个顶点、并且通过第三个顶点的路；

(7) G的任意三个顶点，总存在连接其中任意两个顶点、并且不过第三顶点的路。

证：(1)$\Longrightarrow$(2)，即定理3.2；

(2) $\Longrightarrow$ (3)，令u是任一顶点，vw是任一边，由(2)，存在包含u，v的圈C。若$w \in C$，则C中含u的(v, w)-段+vw构成圈C'，即为所求；若$w \notin C$，由(2)知，v不是G的割点。故存在不过v点的(u, w)-路P，设x是由w出发、沿P前进、与C相交的第一个顶点，则C中含u的(v, x)-段+P中的(w, x)-段+vw构成圈C'，即为所求。

(3) $\Longrightarrow$ (4)，类似(2) $\Longrightarrow$ (3)的证明；

(4) $\Longrightarrow$ (5)，易见(4) $\Longrightarrow$ (3)，令u，v是任意两个顶点，e是任意一条边，由(3)存在C_1、C_2分别包含u、e及v、e。若$u \in C_2$或$v \in C_1$，则(5)已成立。否则从u出发，沿C_1前进，到达C_1与C_2的第一个交点，然后沿C_2含e的部分到达v，即为所求之路；

(5) $\Longrightarrow$ (6)，设u，v是任意两个顶点，w是任意第三个顶点，e是w的关联边，由(5)存在过e的(u, v)-路，显然此路必过w；

(6) $\Longrightarrow$ (7)，设u, v, w是任意三个顶点，由(6)存在过v的(u, w)-路P，则P中(u, v)-段，即为过u，v而不过w的路；

(7) $\Longrightarrow$ (1)，对G中任意两顶点u，v及任意第三顶点w，由(7)知，在$G-w$中存在(u, v)-路，即$G-w$连通。从而G是2-连通的。

(本题刻划了2-连通图的特征，对3-连通和4-连通图，W. T. Tutte 在Indag. Math. Soc. 13 (1963)和P. J. Slater 在J. Combin. Theory 1(1966) 上分别给出它们的构造特征。对n-连通图的特征，除原书上已指出的Menger定理外，L. Lova'sz 在Acta Math. Acad. Sci.

Hungar. 30(1977)和 E. Györi在Combinatorics(1978)得到刻划n-连通图的非常精致的定理如下：

"G是n-连通的，当且仅当在$V(G)$中任取n个不同的顶点v_i($i=1, 2, \cdots, n$)及$v(G)$的任意正整数划分m_i ($i=1, 2, \cdots, n$)，存在$V(G)$的一个划分V_i($i=1,2,\cdots, n$)使得对于每个$i\in\{1, 2, \cdots, n\}$, $v_i\in V_i$, $|V_i|=m_i$, 且$G[V_i]$是连通的。")。

3.3 可靠通讯网络的构造

若用图表示网络，图的连通度可解释为：网络中某些通讯站受破坏就会破坏整个网络系统的通讯业务的最少站数。故可靠通讯网络的最经济构造的数学模型可抽象为：对给定的正整数k，在赋权图上确定一个最小权的k-连通的生成子图。这种问题的一般情况尚未解决。

对于n个顶点上每边赋权为1的完全图，求尽可能少的边的m-连通图，已为F·Harary所解决，得到了n个顶点上具有最少边数$f(m, n)$的m-连通图$H_{m,n}$的构造法，并证明了$f(m, n)=\{mn/2\}$。

$H_{m,n}$的构造法如下：

1．当m是偶数时，$H_{2r,n}$有顶点$0,1,\cdots,n-1$；两顶点i和j连以边，当且仅当$i-r\leqslant j\leqslant i+r$(这里取模$n$加法)。

2．当m是奇数，n是偶数时，$H_{2r+1,n}$构作如下：先作$H_{2r,n}$，然后添加边，这些边把顶点i与顶点$i+(n/2)$相连($1\leqslant i\leqslant n/2$)。

3．当m,n均为奇数时，$H_{2r+1,n}$构作如下：先作

$H_{2r,n}$，然后添加边，这些边把顶点0连到顶点$(n-1)/2$和$(n+1)/2$，并把顶点i连到顶点$i+(n+1)/2$（$1\leqslant i\leqslant(n-1)/2$）。

3.3.1 证明$H_{2r+1,n}$是$(2r+1)$-连通的。

证：只要证明$H_{2r+1,n}$不存在少于$2r+1$个顶点的顶点割集。设V'是一个$|V'|<2r+1$的任一顶点子集。分两种情形：

(1) 当$|V'|<2r$时，正如原书上已证V'不是$H_{2r,n}$的顶点割集，自然也不是在$H_{2r,n}$上加些边的$H_{2r+1,n}$的顶点割集。

(2) 当$|V|=2r$：设V'是$H_{2r+1,n}$的顶点割集。i，j属于$H_{2r+1,n}-V'$的不同分支。考察顶点集合

和
$$S=\{i,i+1,\cdots,j-1,j\}$$
$$T=\{j,j+1,\cdots,i-1,i\}$$
（这里加法取模n）

①若S或T中，有一个含V'的点少于r个，则在$H_{2r+1,n}-V'$中存在(i,j)-路，矛盾！

② 若S与T中都有V'的r个顶点。

1. 若S或T中，有一个(比如S中)V'的r个顶点不是相继连成段，则$S\setminus V'$中存在(i,j)-路，矛盾！

2. 若S与T中，V'的r个顶点都是相继连成一段的。则$S\setminus V'$被分为两段，含i的记S_1，含j的记S_2，同样，$T\setminus V'$也被分为两段，含i的记T_1，含j的记T_2。这样一来，$V\setminus V'$被分为两段，$S_1\cup T_1$含i，$S_2\cup T_2$含j。这两段本身是连通的，且含i段的中间一点（或最靠近中间的一点）i_0与含j段

的类似点j_0满足：

$$j_0=\begin{cases} i_0+\dfrac{n}{2} & (n\text{为偶数}) \\ i_0+\dfrac{n+1}{2} & (n\text{为奇数}) \end{cases}$$

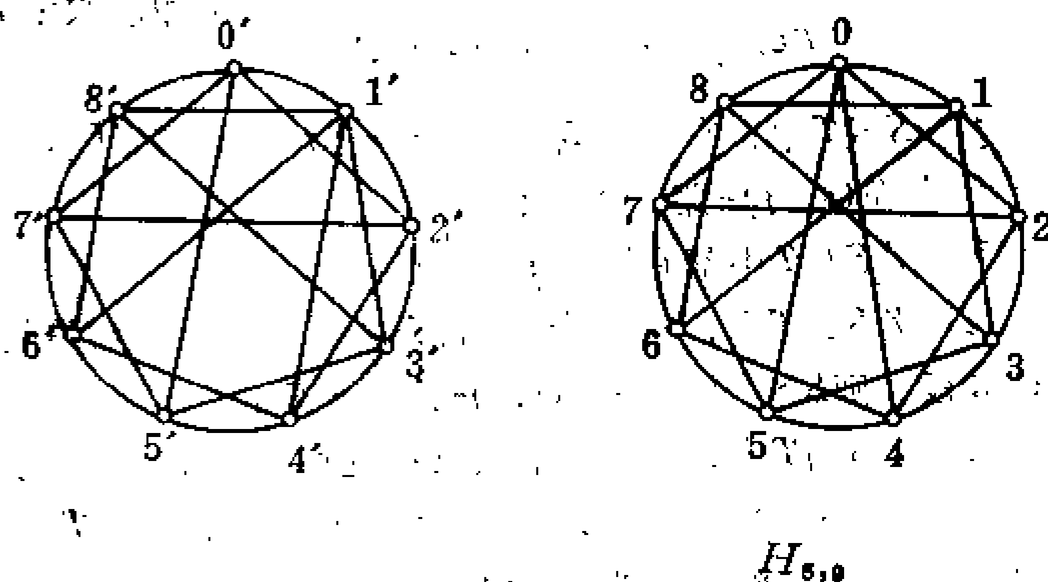
故有边相连。于是在$H_{2r+1,n}-V'$中有路$(i,\cdots,i_0,j_0,\cdots,j)$，矛盾！

3.3.2　证明：$\kappa(H_{m,n})=\kappa'(H_{m,n})=m$。

证：由于$H_{m,n}$是m-连通的，且$\delta(H_{m,n})=m$，再根据定理3.1，有$m\leqslant\kappa(H_{m,n})\leqslant\kappa'(H_{m,n})\leqslant m$，得证。

3.3.3　作一个具有9个顶点和23条边的图，使它是5-连通的，但不同构于原书图3.7(C)中的图$H_{5,9}$。

解：将$H_{5,9}$中的(0,4)边去掉，改为(1,4)边，即为所求。它与$H_{5,9}$如图。



3.3.3　图

利用练习3.3.1的证明方法，不难证明所作之图是5-连通的。

若它与$H_{8,9}$同构，则在同构对应下，必须保持对应点的度数及邻接性。于是必有：

$1'\leftrightarrow 0$，$\{5',7'\}\leftrightarrow\{3,6\}$，但5′与7′间有边相连，而3与6不相邻。矛盾！故它与$H_{8,9}$不同构。

3.3.4 n个顶点m–边连通的图簇中，边的最少可能数目记为$g(m,n)$，证明：$g(m,n)=\{mn/2\}$，对一切$m>1$和$n>1$成立。

证：由定理3.1，对任何m–边连通图G，有$m\leqslant\delta(G)$。再由定理1.1，$e(G)=\sum d(v)/2\geqslant n\delta/2\geqslant mn/2$，因$e$是非负整数，故$e(G)\geqslant\{mn/2\}$。于是有$g(m,n)\geqslant\{mn/2\}$。

若$m<n$，则由练习3.3.2，$\kappa'(H_{m,n})=m$，$e(H_{m,n})=\{mn/2\}$，故n个顶点的m–边连通图中的最小可能的边数$g(m,n)\leqslant\{mn/2\}$。

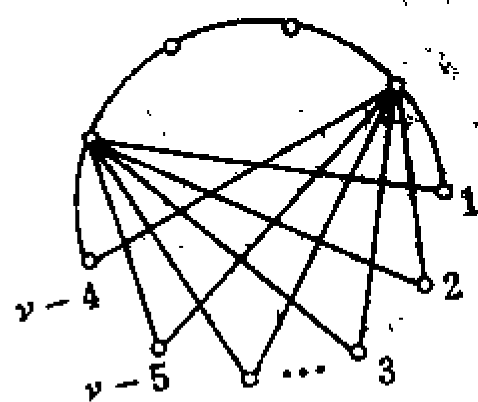
若$m\geqslant n$，则∃非负整数k与$r(<n)$使得$m=k(n-1)+r$，作图$H'_{m,n}$，它是在$H_{r,n}$上的任两顶点间外加k重边所成之图。易知$H'_{m,n}$是n个顶点的m–边连通图，且$e(H'_{m,n})=\{mn/2\}$，故这时也有$g(m,n)\leqslant\{mn/2\}$。于是，$g(m,n)=\{mn/2\}$。

3.3.5 对一切$\nu\geqslant 5$，求一个直径为2，且$\varepsilon=2\nu-5$的2–连通图。

(U. S. R. Murty，1969年已经证明，每个这样的图，至少有这么多的边)。

解：如图，

显然此图直径为2，且$\varepsilon=2(\nu-4)+3=2\nu-5$，无割点，故满足要求。



3.3.5 图

第四章 Euler 游历和 Hamilton 圈

4.1 Euler游历

定义：G 中 **Euler 迹**，是 G 中的一条取 G 中所有边的迹。闭的 Euler 迹称为 G 中的 **Euler 游历**。存在 Euler 游历的图称为 **Euler 图**。

定理4.1 非空连通图是 **Euler 图**的充要条件是它不含奇数度的顶点。

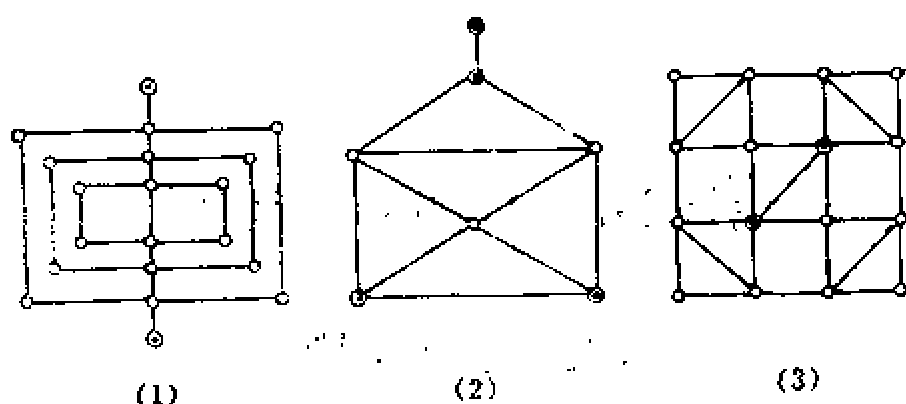
系4.1 连通图具有 Euler迹的充要条件是 G 中最多有两个奇数度顶点。

4.1.1 4.1.1图见下页是否可能在笔不离纸而每条线只过一次的条件下画出来呢？

解：由定理 4.1 和系 4.1 易知(1)，(3)图均可以，而(2)图的奇数度顶点(用⊙表示)为四个，故不可能一笔画出来。

4.1.2 如果可能的话，画一个 ν 为偶数，ε 为奇数的 Euler 图 G，否则说明为何不存在这种图。

证：在 ν-圈 C 上某一顶点加上 $\varepsilon-\nu$ 个环，所成之图，



4.1.1图

即为所求。不过，可以证明，偶数个顶点奇数条边，且又有偶数个顶点的度能被 4 除尽的Euler 图是不存在的。

4.1.3 证明：若 G 是 Euler 图，则 G 的每一块亦是 Euler 图。

证：设 B 是 G 的块，任取 G 中一条 Euler 游历 C，由 B 的某一点 v 出发，沿 C 前进。C 只有经过 G 的割点才能离开 B，亦只有经过同一割点才能回到 B 中，注意到这事实后，我们将 C 中属于 B 外的一个个闭迹除去，最后回到 v 时，我们得到的就是 B 上的一个 Euler 闭迹，故 B 亦是 Euler图。

4.1.4 证明：若 G 没有奇数度的顶点，则G 中存在边不相交的圈 C_1，C_2，…，C_m使得 $E(G)=E(C_1)\cup E(C_2)\cdots\cup E(C_m)$。

证：将 G 中孤立点除去后的图记G_1，则G_1也无奇数度点，且 $\delta(G_1)\geqslant 2$，由练习 1.7.2，G_1 有一个圈 C_1，在图 G_1-C_1 中去孤立点，得图 G_2；显然 G_2 仍无奇数度点，且 $\delta(G_2)\geqslant 2$，再由练习 1.7.2，G_2 中有一圈 C_2，…，如此

直至 G_m 中有圈 C_m，且 G_m-C_m 全为孤立点为止。于是 $E(G)=E(C_1)\cup E(C_2)\cup\cdots\cup E(C_m)$。

4.1.5 证明：若 G 连通，且有 $2k>0$ 个奇数度顶点，则 G 有 k 条边不相交的迹 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 使得 $E(G)=E(Q_1)\cup E(Q_2)\cup\cdots\cup E(Q_k)$。

证：设 $v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{2k}$ 为 G 中的奇数度顶点，在 v_i 和 v_{i+k} 顶点间连以新边 $e_i(i=1, 2, \cdots, k)$，所得之图记为 G^*，则 G^* 的每顶点的度均为偶数，又由 G 连通，G^* 也连通，由定理 4.1 知在 G^* 中存在 Euler 游历 C^*。若我们从 C^* 中除去 $e_i(i=1, 2, \cdots, k)$，则它分解成 k 条边不相交的迹 $Q_i(i=1, 2, \cdots, k)$，显然 $E(G)=E(Q_1)\cup\cdots\cup E(Q_k)$。

4.1.6 设 G 是非平凡的 Euler 图，且 $v\in V$，证明：G 中起点为 v 的每一条迹可以延长成 G 的 Euler 游历的充要条件是 $G-v$ 是森林。 (O.Ore)

证：⇒：若 $G-v$ 含有圈 C，则考虑 $G'=G-E(C)$ 包含 v 的分支 H，由定理 4.1，G 中每个顶点的度均为偶数，从而 G' 中的每个顶点的度亦为偶数，故 H 亦为 Euler 图。设 T 为以 v 为起点 v 为终点的 H 上的 Euler 迹，由于 T 和 C 边不相交，且和 v 关联的边均在 T 中，所以 T 无法延长成 G 上的一条 Euler 游历，这与假定矛盾。故 $G-v$ 是森林。

⇐：设 $Q=(v, w)$-迹为一条不能延长成 G 中的Euler游历的最长迹，因而 Q 的终点 w 必为 v，且 Q 包含了和 v 关联的所有的边，Q 是一条闭迹。于是有 $G-v\supseteq G-Q$，且 $G-Q$ 的每个顶点亦为偶数度，从而 $G-Q$ 的每个分支亦必然

为 Euler 图，即 $G-Q$ 的每一个分支都含圈。这与 $G-v$ 是森林这假定相矛盾。故 G 中以 v 为起点的每一条迹可以延长成 G 中的一条 Euler 游历。

4.2 Hamilton 圈

定义：G 中包含所有顶点的路称为 **Hamilton 路**。G 中的闭 Hamilton 路称为 **Hamilton 圈**。若 G 含有 Hamilton 圈称 G 是 **Hamilton 图**。

定理4.2 G 是 Hamilton 图，则对每个非空子集 $S\subset V$，成立 $\omega(G-S)\leqslant|S|$。

定理4.3 (G.A.Dirac 1952)若 G 是 $\nu\geqslant3$ 的单图，且 $\delta\geqslant\nu/2$，则 G 是 Hamilton 图。

定理4.4 单图 G 是 Hamilton 图的充要条件是 G 的闭包 $C(G)$ 是 Hamilton 图。

系4.4 对 $\nu\geqslant3$ 的单图 G，若 $C(G)$ 是完备的，则 G 是 Hamilton 图。

定理4.5 单图 G 具有度序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$, $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_\nu$，$\nu\geqslant3$。假若不存在 $m<\nu/2$，它满足 $d_m\leqslant m$，和 $d_{\nu-m}<\nu-m$，则 G 是 Hamilton 图。

系4.6 若 G 是 $\nu\geqslant3$，$\varepsilon>\binom{\nu-1}{2}+1$ 的单图，则 G 是 Hamilton 图。而且，$\varepsilon=\binom{\nu-1}{2}+1$ 的非 Hamilton 单图只有 $C_{1,\nu}$ 和 $C_{2,5}$。这里 $C_{m,\nu}=K_m V(K_m^c+K_{\nu-2m})$。

4.2.1 证明：若 (a) G 不是 2-连通的，或 (b) G 是二

部图，且它的二部划分(X,Y)有$|X|\neq|Y|$，则G是非Hamilton图。

证：(a)若G不是2-连通的，则G不连通或存在割点v，有$\omega(G-v)\geqslant 2$，由定理4.2知G是非Hamilton图。(b) 设G是2-部图，其划分为(X,Y)，且$|X|<|Y|$，则有$\omega(G-X)=|Y|>|X|$，由定理4.2知G是非Hamilton图。

4.2.2 一只老鼠吃$3\times3\times3$立方体的乳酪，其方法是借助于打洞通过所有的27个$1\times1\times1$子立方体。如果它在一个角上开始，然后依次走向未吃的立方体，问它吃完时能否恰在立方体的中心？

解：我们构作图G，其顶点为$1\times1\times1$的子立方体，当且仅当两子立方体有公共面时，对应的两顶点相连以边。容易看出G是一个2-部图，其划分为(X,Y)。若角上一子立方体对应的点属于X，则立方体中心的子立方体对应的点属于Y。易直接验证$|X|=14$，$|Y|=13$。故以X中的一顶点为起点，Y中的顶点为终点的Hamilton路不可能存在。否则，起点与终点连一条边是个Hamilton图，与练习4.2.1(b)矛盾；所以老鼠吃完时不可能在立方体的中心。

4.2.3 证明，若G有Hamilton路，则对V的每一个真子集S，有$\omega(G-S)\leqslant|S|+1$。

证：设C是G中的一条Hamilton路，于是有$\omega(G-S)\leqslant\omega(C-S)\leqslant|S|+1$。

4.2.4 设G是度序列为$(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$的非平凡单图，其中$d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_\nu$。证明，若不存在$m<(\nu+1)/2$，它满足$d_m<m$和$d_{\nu-m+1}<\nu-m$，则$G$有Hamilton路。

(V.Chva'tal)

证：对 G 加入一个新顶点 v，它和 G 中每一顶点均相连。所得之图记为 G'，于是 G' 的度序列为 $(d_1+1, d_2+1, \cdots, d_\nu+1, \nu)$，由已知条件可知，不存在 $m<(\nu+1)/2$，它满足 $d_m<m$ 和 $d_{\nu-m+1}<\nu-m$，即不存在 $m<(\nu+1)/2$，它满足 $d_{m+1}\leqslant m$ 和 $d_{\nu-m+1}+1<\nu-m+1=(\nu+1)-m$。由定理 4.5 知，$G'$ 中含有 Hamilton 圈 C，显然 $C-v$ 是 G 中的 Hamilton 路。

4.2.5 (a) 设 G 为度序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$ 的单图，并设 G^c 有度序列 $(d'_1, d'_2, \cdots, d'_\nu)$ 其中 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_\nu$，$d'_1\leqslant d'_2\leqslant\cdots\leqslant d'_\nu$，证明：若对一切的 $m\leqslant\nu/2$，均有 $d_m\geqslant d'_m$，则 G 有 Hamilton 路。

(b) 证明：若 G 是自补的，则 G 有 Hamilton 路。

(C.R.J.Clapham)

证：(a) 由 G 与 G^c 的互补性及度序列的单调性知，若 $d_G(v_i)=d_i$，则 $d_G^c(v_i)=d'_{\nu-i+1}$。

若存在 $m<(\nu+1)/2$，满足 $d_m<m$ 和 $d_{\nu-m+1}<\nu-m$。由假定知，有 $d'_m\leqslant d_m\leqslant m-1$，且有 $d_{\nu-m+1}\leqslant\nu-m-1$。于是 $\nu-1=d_G(v_{\nu-m+1})+d_G^c(v_{\nu-m+1})=d_{\nu-m+1}+d'_m\leqslant\nu-2$，矛盾！故不存在这样的 m。由练习 4.2.4 知，G 有 Hamilton 路。

(b) 因为 $G\cong G^c$，则有 $d_i=d'_i(i=1, \cdots, \nu)$，从而 ($a$) 的条件满足，所以 G 有 Hamilton 路。

4.2.6 设 G 是一个 2-部单图，其划分为 (X, Y)，且 $|X|=|Y|\geqslant2$。若 G 具有度序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$，满足 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_\nu$，证明：若不存在 $m\leqslant\nu/4$，满足 $d_m\leqslant m$，和 $d_{\nu/2}\leqslant\nu/2-m$，则 G 是 Hamilton 图。

证：在 G 中加入新的边构作一新图 G'，使 $G'[X]$ 是完全图。为了叙述方便，设在 G 中 Y 的顶点度序列为 $(d(u_1), d(u_2), \cdots, d(u_{v/2}))$，且 $d(u_1)\leqslant d(u_2)\leqslant\cdots\leqslant d(u_{v/2})$，$X$ 中的顶点的度序列为 $(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_{v/2}))$，且 $d(v_1)\leqslant d(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d(v_{v/2})$。它们合并起来的度序列是 $(d_1, d_2, \cdots, d_v)$，于是对于 G' 的度序列显然是如下情况：$(d(u_1), d(u_2), \cdots, d(u_{v/2}), d(v_1)+v/2-1, d(v_2)+v/2-1, \cdots, d(v_{v/2})+v/2-1)=(d'_1, d'_2, \cdots, d'_{v/2}, d'_{v/2+1}, \cdots, d'_v)$。下面分两种情况来讨论。(1) 若存在 $m\leqslant v/4$，有 $d'_m=d(u_m)\leqslant m$，$d'_{v-m}<v-m$，则有 $d_m\leqslant m\leqslant v/2-m$，$d'_{v-m}=d(v_{v/2-m})+v/2-1<v-m$，即 $d(v_{v/2-m})\leqslant v/2-m$。由于 $m+(v/2-m)=v/2$，知非降序列 $(d_1, \cdots, d_v)$ 中至少有 $v/2$ 个 $d_i\leqslant v/2-m$，于是对应在 G 中有 $d_{v/2}\leqslant v/2-m$，这与假定相矛盾。(2) 若存在 $v/4<m<v/2$，有 $d'_m=d(u_m)\leqslant m$，$d'_{v-m}<v-m$，令 $k=v/2-m<v/4$，则 $d(u_m)\leqslant m$ 变成 $d(u_{v/2-k})\leqslant v/2-k$，$d'_{v-m}<v-m$ 变成 $d(v_{v/2-m})=d(v_k)\leqslant v/2-m=k<v/2-k$。由于 $k+(v/2-k)=v/2$，于是对应在 G 中有 $d_{v/2}\leqslant v/2-k$，但这又与假定不存在这种性质的 k 相矛盾。综合(1)、(2)知，不存在 $m<v/2$，同时成立 $d'_m\leqslant m$，$d'_{v-m}<v-m$。故由定理 4.5 知，G' 是 Hamilton 图。设 C 是 G' 中的 Hamilton 圈，C 中一定不含 $G'[X]$ 中的边。这是因为假如含 $G'[X]$ 的边 e 时，则把 e 收缩掉，并把 e 的两端点合并成一个新顶点，这过程一直进行到不含 $G'[X]$ 的边为止。最后 C 变成 C^*，G' 变成 G''，显然 G'' 仍是 2-部图，且划分的两部顶点的个数不相等，C^* 是 G'' 上的 Hamilton 圈。但由练习 4.2.1(b)知矛盾；所以 $C\subseteq G$ 中，即

G是 Hamilton 图。

4.2.7 用系 4.4 证明系 4.6。

证：（a）先证系 4.6 的前半部分。若G是非 Hamilton 图，由系 4.4 知，$C(G)$不是完全图。在G中存在u_1，u_2使得，$d(u_1)+d(u_2)\leqslant \nu-1$ 且$u_1u_2\notin E(G)$。令$V'=V\setminus\{u_1, u_2\}$，故有：

$$\begin{aligned}\varepsilon(G)&=\frac{1}{2}(d(u_1)+d(u_2)+\sum_{v\in V'}d(v))\\&\leqslant\frac{1}{2}((\nu-1)+(\nu-2)(\nu-3)+(\nu-1))\\&=\binom{\nu-1}{2}+1\end{aligned}$$

与条件矛盾！所以，G是 Hamilton 图。

（b）证系 4.6 的后半部：设G是$\nu\geqslant3$，$\binom{\nu-1}{2}+1$条边的非 Hamilton 图，由$\varepsilon(G)>\binom{\nu-1}{2}$及练习 1.6.5 知，$G$连通，故$\delta\geqslant1$。其次有：$C(G)=G$，否则$\varepsilon(C(G))>\binom{\nu-1}{2}+1$，由(a)知，$C(G)$是 Hamilton 图，从而$G$是 Hamilton 图，矛盾！

设$d_G(v_\delta)=\delta$ 考察$G-v_\delta$有：$\varepsilon(G-v_\delta)=\binom{\nu-1}{2}-(\delta-1)$，故$G-v_\delta$是$K_{\nu-1}$去掉$\delta-1$条边后的图。下面分三种情况讨论：

（1）当$\delta>2$，有$\nu>3$：$G-v_\delta$中至多一个顶点的度为$(\nu-2)-(\delta-1)=\nu-\delta-1$，其余$\nu-2$个顶点的度均不小于

$\nu-\delta$。由于 $C(G)=G$，这 $\nu-2$ 个顶点在 G 中应和 v_δ 相连，故 $\nu-2\leqslant\delta$，于是对 G 中任意两点 u，v，有 $d(u)+d(v)\geqslant 2\delta\geqslant 2(\nu-2)\geqslant\nu$，从而 $C(G)=K_\nu$，由系 4.4这与 G 是非Hamilton 图矛盾！故不存在满足系 4.6 中条件且 $\delta>2$ 的非 Hamilton 图。

(2) 当 $\delta=2$。$G-v_\delta$ 是 $K_{\nu-1}$ 中去掉 1 条边的图。这时，$G-v_\delta$ 有 2 个顶点，其度为 $\nu-3$。有 $\nu-3$ 个顶点，其度为 $\nu-2$。由于 $C(G)=G$，这 $\nu-3$ 个顶点在 G 中应和 v_δ 相连，故 $\nu-3\leqslant\delta=2$，即 $\nu\leqslant5$。于是由上面所得的性质，直接构作 G，易知，当 $\nu=3$，4 时，有 $\delta(G)=1$ 而矛盾。故仅能 $\nu=5$，此时 $G=C_{2,5}$。

(3) $\delta=1$ 时，$G-v_\delta$ 是 $K_{\nu-1}$，故 $G=C_{1,\nu}$。

4.2.8 证明：若 G是单图，且$\nu\geqslant 6\delta$，$\varepsilon>\binom{\nu-\delta}{2}+\delta^2$ 则 G 是 Hamilton 图。

(P.Erdös)

证：若 G 是一个非 Hamilton单图，$\nu\geqslant3$，由定理4.6存在 $C_{m,\nu}$；G 的度序列被 $C_{m,\nu}$ 度序列所控制，这里 m 满足 $\delta\leqslant m<\frac{\nu}{2}$。因此由定理 1.1，$\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(C_{m,\nu})=\frac{1}{2}(m^2+(\nu-2m)(\nu-m-1)+m(\nu-1))=\binom{\nu-\delta}{2}+\delta^2-\frac{1}{2}(m-\delta)(2\nu-3m-3\delta-1)$。当 $6\delta\leqslant\nu$，$\delta\leqslant m<\frac{\nu}{2}$时，$2\nu-3m-3\delta-1>0$，故我们有 $\varepsilon(G)\leqslant\binom{\nu-\delta}{2}+\delta^2$，这和 $\varepsilon(G)>\binom{\nu-\delta}{2}$

$+\delta^2$ 的假定相矛盾。故 G 是 Hamilton 图。

4.2.9 若 G 是连通单图，且 $\nu>2\delta$，则 G 中有一条长度至少为 2δ 的路。 (G.A.Dirac)

(G.A.Dirac 1952 年还证明了：假如 G 是一个 2-连通单图，且 $\nu\geqslant 2\delta$，则 G 中有一个长度至少为 2δ 的圈。)

证：设 $P(u,v)$ 是 G 中最长的路，其长度为 $l<2\delta$，路 $P(u,v)$ 中的顶点依次为 $v_1(=u)$，v_2，…，$v_{l+1}(=v)$，故和 u,v 相邻的顶点均在路上。由于 G 是单图，从而若令 $S=\{v_i|uv_{i+1}\in E\}$，$T=\{v_i|vv_i\in E\}$，则 $|S|=d(u)\geqslant\delta$，$|T|=d(v)\geqslant\delta$。按定义 $v\notin S\cup T$，故 $|S\cup T|\leqslant l<2\delta$，所以有 $S\cap T\neq\Phi$。设 $v_i\in S\cap T$，于是我们得到 G 中的一个长度为 $l+1$ 的圈 C 如下：$u(=v_1)v_2\cdots v_i v_{l+1}(=v)v_l v_{l-1}\cdots v_{i+1}u$。由于 $\nu>2\delta$，$l+1\leqslant 2\delta$，故在 C 外存在一点 $v_0\in V(G)$。由于 G 是连通的，所以有一条 C 外的路 P' 和 C 相连，不失一般性，不妨假定和 v_1 相连，于是我们在 G 中找到了一条路 P：P' 加上 $v_1v_2\cdots v_i v_{l+1}v_l\cdots v_{i+1}$ 路，显然 P 的长度大于 l，但这又与 $P(u,v)$ 是 G 中最长路相矛盾。故 $l\geqslant 2\delta$。

4.2.10 利用练习 4.2.9 的原书附注，证明每个 $4k+1$ 个顶点的 $2k$-正则单图($k\geqslant 1$)是 Hamilton 图。

(C.St.J.A.Nash-Williams)

证：设 $v\in V$，若 $G-v$ 不连通，由于 $G-v$ 共 $4k$ 个顶点，故不失一般性设 $G-v$ 的一个分支 G_1 有 $\nu(G_1)\leqslant 2k$，

$\nu(\bar{G})\leqslant 2k+1$,其中$\bar{G}_1$是$G[V(G_1)\cup\{v\}]$。由$G$是$2k$-正则单图，故$\bar{G}_1$仅能是$K_{2k+1}$。特别$v$在$\bar{G}_1$中的度亦为$2k$，故$v$和$G-v$中$G_1$以外的分支$G_2$等均不相连，且$\nu(G_2)\leqslant 2k$，所以$G_2$中的顶点的度均不大于$2k-1$，但这和$G$是$2k$-正则的矛盾，故$G$是2-连通的。根据练习4.2.9中的原书附注知，$G$中存在一个长度至少为$4k$的圈。假如$G$中不含$4k+1$长的圈，设$v_0\notin C$，$C$为$v_1v_2\cdots v_{4k}$圈，显然$v_0$不能和$C$上相邻两点相连。否则$G$中就存在$4k+1$长的圈。故我们不妨设$v_0$和$v_{2i-1}(i=1, 2, \cdots, 2k)$相连。同理对$v_{2i}$和圈$v_1\cdots v_{2i-1}v_0v_{2i+1}\cdots v_{4k}(i=1, 2,\cdots, 2k)$讲，由于图$G$是$2k$-正则的，从而$v_{2i}$一定和$v_{2j-1}(i=1, 2,\cdots,2k)$的所有顶点相连。但这时$v_1$则和$v_0$，$v_{2i}(i=1, 2, \cdots, 2k)$相连，即$d(v_1)=2k+1$，这和$G$是$2k$-正则的相矛盾，故$G$中含$4k+1$长的圈，即$G$是Hamilton图。

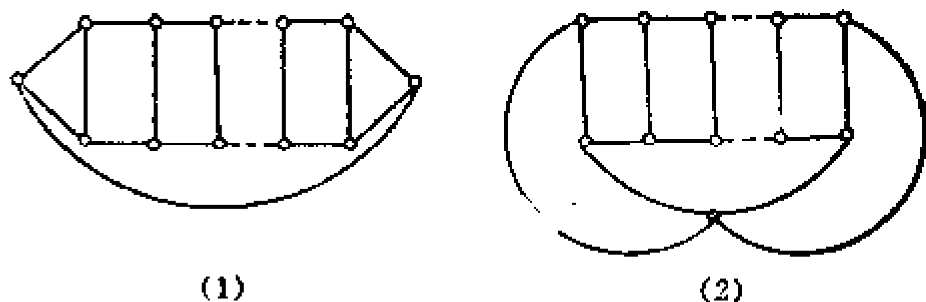
4.2.11 若G中任意两点均存在一条Hamilton路相连，则称G是**Hamilton连通的**。

(a) 证明：若G是Hamilton连通的，且$\nu\geqslant 4$，则$\varepsilon\geqslant[(3\nu+1)/2]$。

(b) 对$\nu\geqslant 4$，构造一个Hamilton连通图G，且满足$\varepsilon=[(3\nu+1)/2]$。 (J.W.Moon)

证：(a) 若有$v_0\in V(G)$，使$d(v_0)=2$。设v_0的两邻点为v_1，v_2，因$\nu\geqslant 4$，则在G中不存在以v_1，v_2为端点的一条Hamilton路，这是和假设矛盾的。故$\delta(G)\geqslant 3$。由定理1.1，$\varepsilon\geqslant\{3\nu/2\}$，故$\varepsilon\geqslant[(3\nu+1)/2]$。

(b) 对ν=偶数时　　　　对ν=奇数时



4.2.11 (b) 图

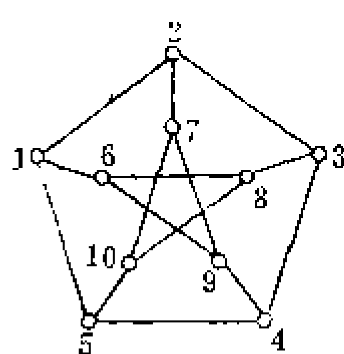
本例说明(a)之不等式不能改进。

4.2.12 若G不是Hamilton图，但对G中任意顶点$v\in V(G)$，$G-v$均是Hamilton图，则称G是亚Hamilton图。证明：Petersen图是亚Hamilton图。

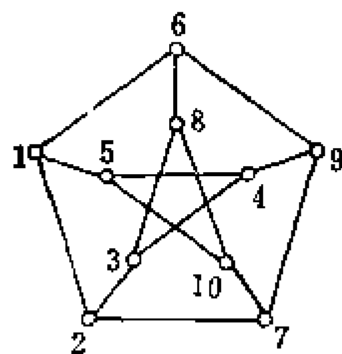
(J.C.Herz, J.J.Duby 和 F. Vigue 1967年证明了Petersen图是最小的亚Hamilton图。)

证，4.2.12图的四张图均是Petersen图，其顶点间的对应关系已在图上标明，从(1)、(2)、(3)图中可知Petersen图中各边和各顶点间之地位是完全对称的。再由Petersen图是3-正则的，从而标定一个Hamilton圈C相当于和顶点相关联的三条边中标定一条不在Hamilton圈C上的边，故不失一般性，假定边$(1,2)\notin C$，于是$(1,5)$，$(1,6)$，$(2,3)$，$(2,7)\in C$。下面分两种情况讨论：a)，$(8,10)\notin C$，则$(5,10)$，$(7,10)$，$(3,8)$，$(6,8)\in C$，可是这样一来这些边已构成15(10)723861圈。b)，$(8,10)\in C$，则$(5,10)$和$(7,10)$中有一边不属于C，由(4)图不失一般性，假定$(7,10)\notin C$，于是$(5,10)$，$(7,9)\in C$，$(4,5)\notin C$。从而又有$(3,4)$，$(4,9)\in C$，可是这样一来这些边中已包含了234972圈，故Petersen图不是Hamilton图。

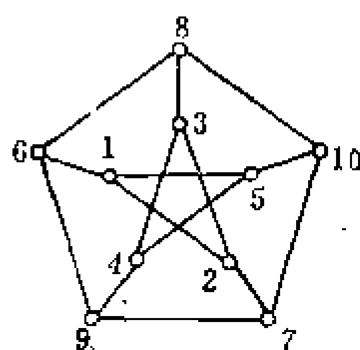
对任意$v\in V$(由顶点的对称性，在(4)图中，不妨设$v=10$)，显然$G-v$是Hamilton图，故Petersen图是亚Hamilton图。



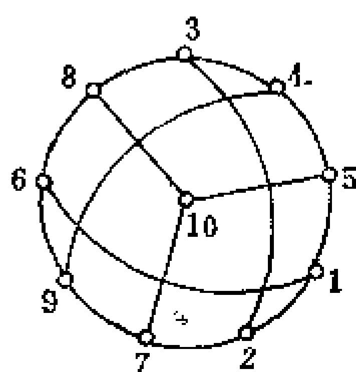
(1)



(2)



(3)

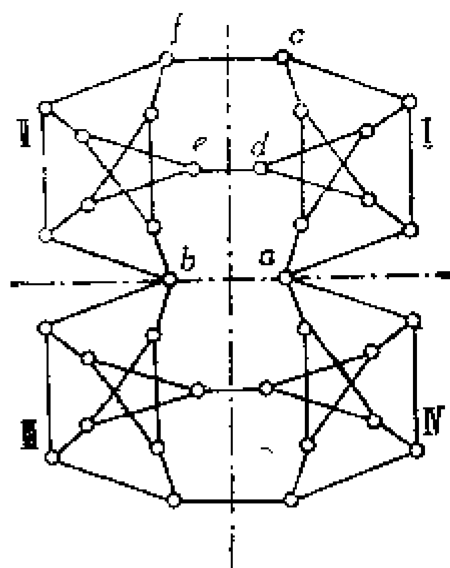


(4)

4.2.12 图

4.2.13 G中没有Hamilton路，但对任意的$v\in V(G)$，$G-v$存在Hamilton路，则称G是**亚可迹的**。证明Thomassen图是亚可迹的。

证：为了叙述方便，如图，我们用两条中心线将Thomassen图分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅵ部分，这四部分是对称的，



Thomassen 图

故不失一般性，若 Thomassen 图具有 Hamilton 路 P,其端点为 α, β，可假定 $\alpha\in I\cup\{a\}$,由练习4.2.12,Petersen 图不存在 Hamilton 圈，从而我们有如下性质：

(A) Ⅰ$\cup\{a\}$中不存在以 $\{a,c,d\}$ 中任两点作为端点的 Hamilton 路。

由(A)并注意到Ⅰ、Ⅱ之间仅两边相连，于是有

(B) Ⅰ$\cup$Ⅱ$\cup\{a,b\}$ 不存在以 a 为端点的Hamilton 路。

又 Thomassen 图是2−连通图，$\{a,b\}$是其割集，且 a，b 在图中的地位是对称的。于是当 $\beta\in$ Ⅰ$\cup$Ⅱ$\cup\{a, b\}$ 时，P 的存在相当于在 Ⅲ$\cup$Ⅳ$\cup\{a,b\}$ 中存在以 a 或 b 为端点的 Hamilton 路；当 $\beta\in$ Ⅲ$\cup$Ⅳ时，由 α 出发，沿 P 前进在经过 a 或 b 进入Ⅲ$\cup$Ⅳ前，必须经过Ⅱ的所有顶点，否则Ⅱ中未经过之顶点，由于 $\{a,b\}$ 是割集，再没有机会落在P中。于是 P的存在相当于在Ⅱ$\cup\{b\}$中存在以$\{b, e, f\}$中的

某两顶点为端点的 Hamilton 路。或相当于Ⅲ∪Ⅳ∪$\{a,b\}$中存在以 a 或 b 为端点的 Hamilton 路。这些都和(A)、(B)相矛盾。故 Thomassen 图不存在 Hamilton 路。

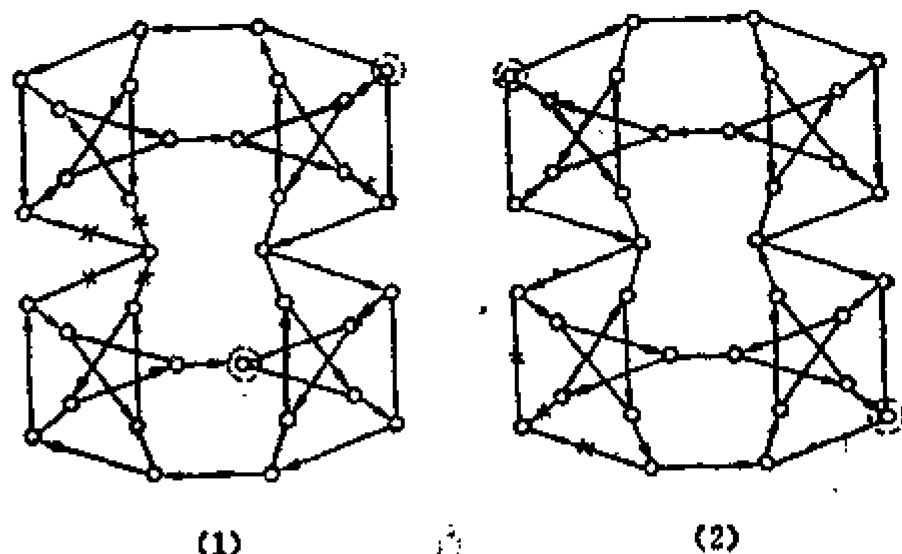
至于 Thomassen 图 G 中任一点 $v\in V(G)$，$G-v$恒存在 Hmailton 路的结论，由图在Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ中的对称性，我们仅需取 b 和Ⅲ中的顶点作为 v 来穷举，并在图上以箭头具体标明它的 Hamilton 路来证明。见 4.2.13图。图中带虚线圈的顶点表示 Hamilton 路的端点，用带叉的边表示和除去的顶点 v 相关联的边。其中(3)—(9)图，它们的Ⅰ、Ⅱ部分均和(2)同，在图中不再画出来。

故 Thomassen 图是亚可迹的。

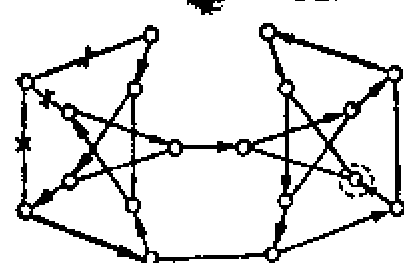
4.2.14 (a)证明4.2.14 图见109页中 G_1，不存在仅含 e_1或 e_2 一条边的Hamilton圈。

(b) 利用(a)，证明图 G_2 的每一个 Hamilton 圈包含边 e。

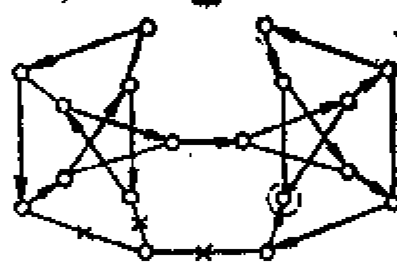
(c) 导出 Horton 图是一个非 Hamilton 图。



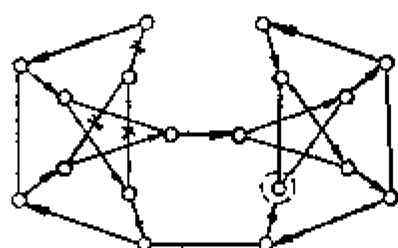
(1) (2)



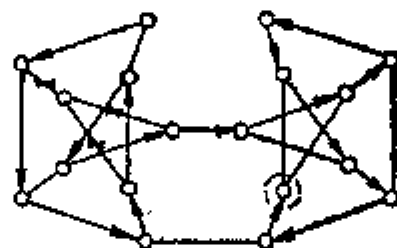
(3)



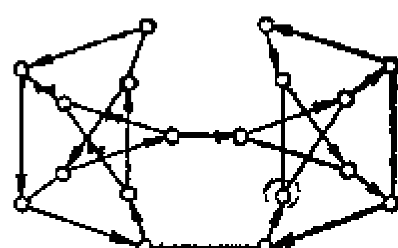
(4)



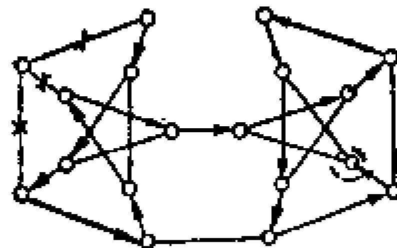
(5)



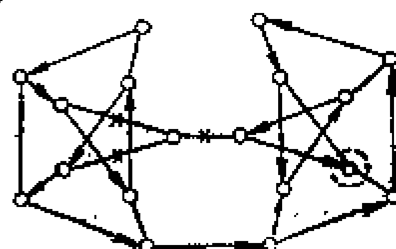
(6)



(7)



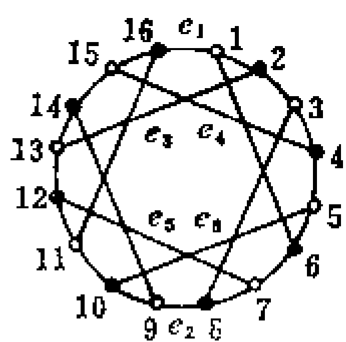
(8)

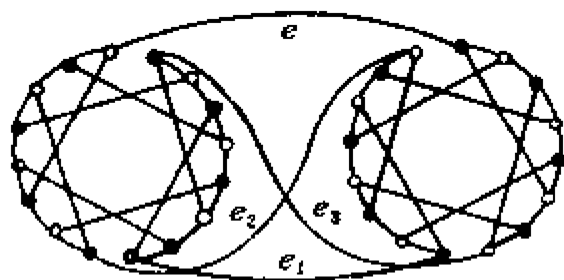


(9)

4.2.13 图

证：(*a*) 设 G_1 中存在仅含 e_1，不含 e_2的 H-圈(将Hamilton 圈简写为 H-圈)。由于边集 $E_1=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$将 G_1 分成两部分，因此这样的 H-圈一定含 $E'_1=$





4.2.14题图

$E_1\setminus\{e_2\}$中的偶数条边。

(1) 若G_1中有H-圈仅含E'_1中的e_1，e_3，它也是$G_1-\{e_2, e_4, e_5, e_6\}$的H-圈，故它含边(5, 6)，(7, 6)，不含边(6, 1)，从而含边(1, 2)，不含边(2, 3)，但这样一来，$G_1-\{e_2, e_4, e_5, e_6, (6, 1), (2, 3)\}$不连通，矛盾！由对称性知，若$G_1$中有仅含$e_1$，$e_4$的H-圈，同样矛盾！

(2) 若G_1中有H-圈仅含E'_1中的e_1，e_6，它也是$G_1-\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$的H-圈，故必含(9, 14)，(13, 14)，(15, 14)，但这样一来顶点14在H-圈中的度为3，矛盾！由对称性，G_1中若有仅含e_1，e_5的H-圈，同样矛盾！

(3) 若G_1中有H-圈仅含E'_1中的e_1，e_3，e_4，e_6，它也是$G_1-\{e_2, e_5\}$的H-圈，故它含边(9, 10)，(9, 14)，(12, 11)，(12, 13)，不含(10, 11)，(13, 14)，从而含边(11, 16)，(14, 15)。若又含边(1, 2)，这时(16)1 2(13)

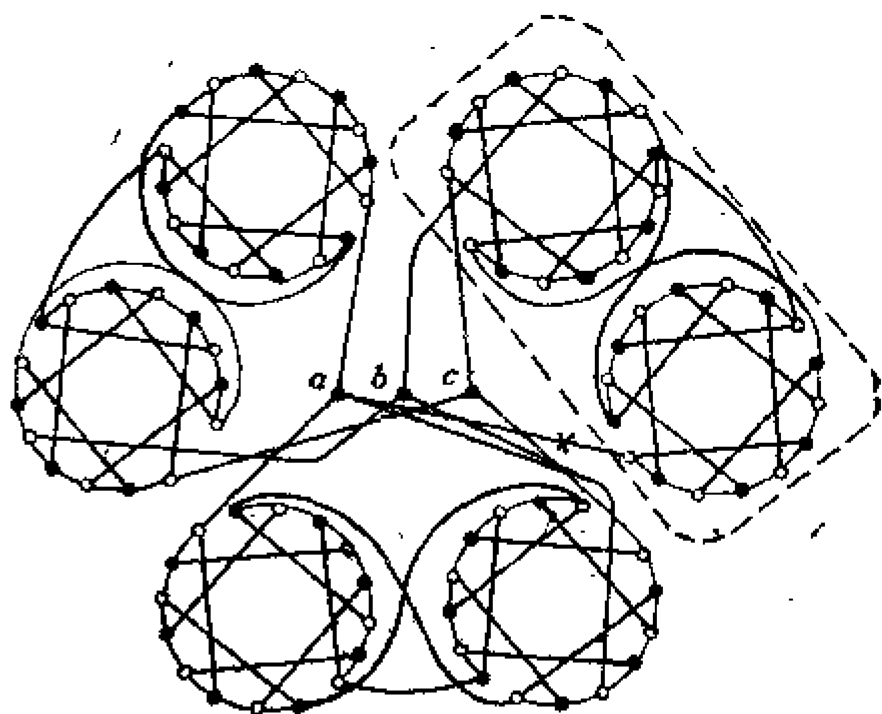
(12)(11)(16) 是一圈，且其中边全在H-圈中，矛盾！若不含边(1, 2)，必含(1, 6)，这时，又必含(4, 5)，于是4 5(10)9(14)(15) 4，又是边全在H-圈中的圈，矛盾！由对称性，若G_1中有H-圈仅含e_1，e_2，e_4，e_5，有类似矛盾！

(4) 若G_1中有H-圈仅含E'_1中的e_1，e_3，e_5，e_6，它也是$G-\{e_2, e_4\}$的H-圈，故它必含(9, 10)，(15, 16)，不含(11, 16)，(10, 11)，但这时点11在H-圈中度为1，矛盾！由对称性，若有仅含e_1，e_4，e_5，e_6的H-圈，导出同样矛盾！

综上所述，G_1中不存在仅含e_1，不含e_2的H-圈，同理不存在仅含e_2，不含e_1的H-圈。故(*a*)的结论成立。

(*b*) 为了叙述方便，将连接G_2-e左右两部分之间的边标以e_1，e_2，e_3。今假如G_2中e边已除去后，仍存在H-圈C的话，注意到G_2是2-部图，黑点和白点是G_2顶点的二部划分。显然e_1边一定属于C，不然G_2的右边部分的图中存在一条两端点都是白点的Hamilton路，在二部顶点数相同的2-部图中，这是不可能的。其次，e_2也一定属于C，不然我们将e_1，e_3连同G_2的左边部分在C中的一段路看成G_1中的一条边"e_1"，于是我们得到G_1的一条含有e_1边而不含e_2边的H-圈，这与(*a*)矛盾。同理e_3也一定属于C，即C中必需包含e_1，e_2，e_3三边。但由于$\{e_1, e_2, e_3\}$是G_2-e的边割集，C不可能同时包含e_1，e_2，e_3，矛盾，故G_2若有H-圈，它一定包含e边。

(*c*) 为了叙述方便，将下面的Horton图中的三个顶点标以a，b，c，若图存在H-圈C，则C中只能包含过a点



Horton 图

之二边，由对称性，不失一般性可假定和 a 关联的打"×"的边不在 C 上，现将 C 中不在右上角(虚线内)的图内的那段路收缩成一点，此时 b 和 c 点当然亦就合并成一个顶点，最后所得的圈记为 C'，显然 C' 就成了 G_2-e 的一条 H-圈。但由(b)知，它不可能存在，故推之 C 亦不可能存在，所以 Horton 图是非 Hamilton 图。

(Horton 图否定了 W.T.Tutte 的猜测：每一个 3-正则 3-连通2-部图是 Hamilton 图。)

4.2.15 写出一个下圈问题的好算法：

(a) 构造图的闭包；

(b) 若图 G 的闭包是完全图，求 G 的 Hamilton 圈。

解：(a) 求图 G 的闭包 $C(G)$的算法步骤可如下：

第 0 步：令 $G_0=G$，$k=0$；

第 1 步：在 G_k 中求顶点 u_0，v_0 满足：

$d_{G_k}(u_0)+d_{G_k}(v_0)=\max\{d_{G_k}(u)+d_{G_k}(v)\ |uv\notin E(G_k)\}$

第 2 步：若 $d_{G_k}(u_0)+d_{G_k}(v_0)\geqslant v$ 转第 3 步；否则，停：（得 $C(G)\cong G_k$）

第 3 步：令 $G_{k+1}=G_k+u_0v_0$；$k\leftarrow k+1$；转第 1 步。

G_k 中求不相邻点的比较次数不超过 $\binom{v}{2}$，且不相邻点对的数目不超过 $\binom{v}{2}-\varepsilon$，于是，1 至 3步每循环 1 次计算量不超过 $\binom{v}{2}+2\left(\binom{v}{2}-\varepsilon\right)+3$，而循环次数最多 $\binom{v}{2}-\varepsilon$ 次，故这个算法是好的。

（b）我们注意到，若$G_{k+1}=G_k+u_0v_0$，$u_0v_0\notin E(G_k)$ 且$d_{G_k}(u_0)+d_{G_k}(v_0)\geqslant v$，而在 G_{k+1} 中有 Hamilton 圈 C_{k+1} 如下：$(u_0, v_0, v_1, \cdots, v_{v-2})$，则在 C_{k+1} 上一定存在 v_i，v_{i+1} 使得：v_iu_0，$v_{i+1}v_0\in E(G_k)$，否则在 G_k 中有：$d_{G_k}(u_0)+d_{G_k}(v_0)<v$，这与条件矛盾！故，$(u_0, v_i, v_{i-1}, \cdots, v_1, v_0, v_{i+1}, \cdots, v_{v-2}, u_0)$ 是G_k的Hamilton 圈，根据这一道理，可得如下算法：

第 0 步：实行(a)的算法步骤，由 G 构造 $C(G)$；已知 $C(G)\cong G_n$ 是完全图。将其中外加边按加入顺序记为 e_1，…，e_n；任取 G_n 中一条 Hamilton 圈 C_n，令 $k=n$；$\left(n=\binom{v}{2}-\varepsilon\right)$。

第 1 步：若 $e_k\notin C_k$，令 $G_{k-1}=G_k-e_k$，$C_{k-1}=C_k$，转第 3 步；否则，转第 2 步。

第2步：设 $e_k=u_0v_0\in C_k$，令，$G_{k-1}=G_k-e_k$；求 C_k 中两个相邻点 u，v 使得 u_0、v_0、u、v 依序排列在 C_k 上，且有：uu_0，$vv_0\in E(G_{k-1})$，令 $C_{k-1}=C_k-\{u_0v_0,\ uv\}+\{uu_0,\ vv_0\}$；

第3步：若 $k=1$，转第4步；否则，令 $k\leftarrow k-1$，转第1步；

第4步，停；(得 C_0 即 G 的 Hamilton 圈)。

这一算法，循环次数为 $n=\binom{\nu}{2}-\varepsilon$；每次循环最多的计算量在第2步中，其中 C_k 上找相邻点 u，v 不超出 $\nu-3$ 对，故除第0步的计算量外，又增加了最多 $n(\nu-3)$ 数量级的运算次数，故是好算法。

4.2.16 求最小度为 δ 的图序列，它不满足定理4.5的条件。

解：对 $\delta\leqslant k<\nu/2$，如下图序列符合要求。$\delta,\ \overbrace{k,\cdots,k}^{k-1},\ \overbrace{\nu-k-1,\ \cdots,\ \nu-k-1}^{\nu-2k},\ \overbrace{\nu-2,\cdots,\nu-2}^{1-\delta},\ \overbrace{\nu-1,\cdots,\nu-1}^{\delta}$。

显然它是满足 $\delta\leqslant k<\nu/2$，且使 $d_k=k$，$d_{\nu-k}=\nu-k-1<\nu-k$ 的一个极图的度序列。

4.3 中国邮递员问题

定义：中国邮递员问题是在赋以非负权的连通图上，求一条最小权游历。(称为**最优游历**)。

显然 Euler 图的任一 Euler 游历是最优游历。

求 Euler 游历有下列 Fleury 算法：

1. 选任意一个顶点 v_0，令 $w_0=v_0$。

2. 假设迹 $w_i=v_0e_1v_1\cdots e_iv_i$ 已选好，从 $E\setminus\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中按下列方法选择一条边 e_{i+1}：

(i) e_{i+1} 与 v_i 关联。

(ii) 除非没有其它选择，e_{i+1} 不是 $G_i=G-\{e_1,\cdots, e_i\}$的割边。

3. 当第 2 步不能执行时，停止。

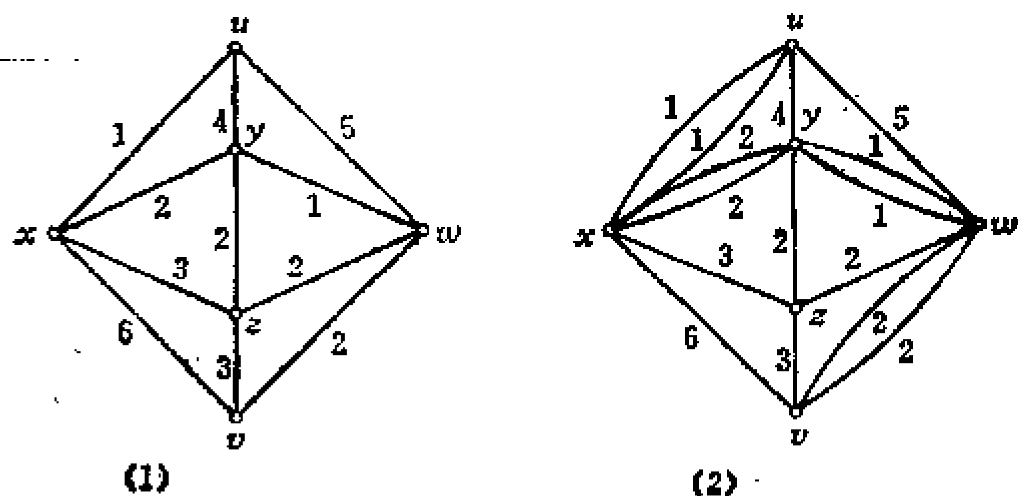
定理4.7 若 G 为 Euler 图，则由 Fleury 算法构造的 G 中任一条迹都是 G 的 Euler 游历。

中国邮递员问题的解法：

1. 用双倍边的方法求 G 的一个 Euler 型赋权母图 G^*，使双倍边的权和最小。

2. 求 G^*的 Euler 游历。(有 Fleury 算法)。

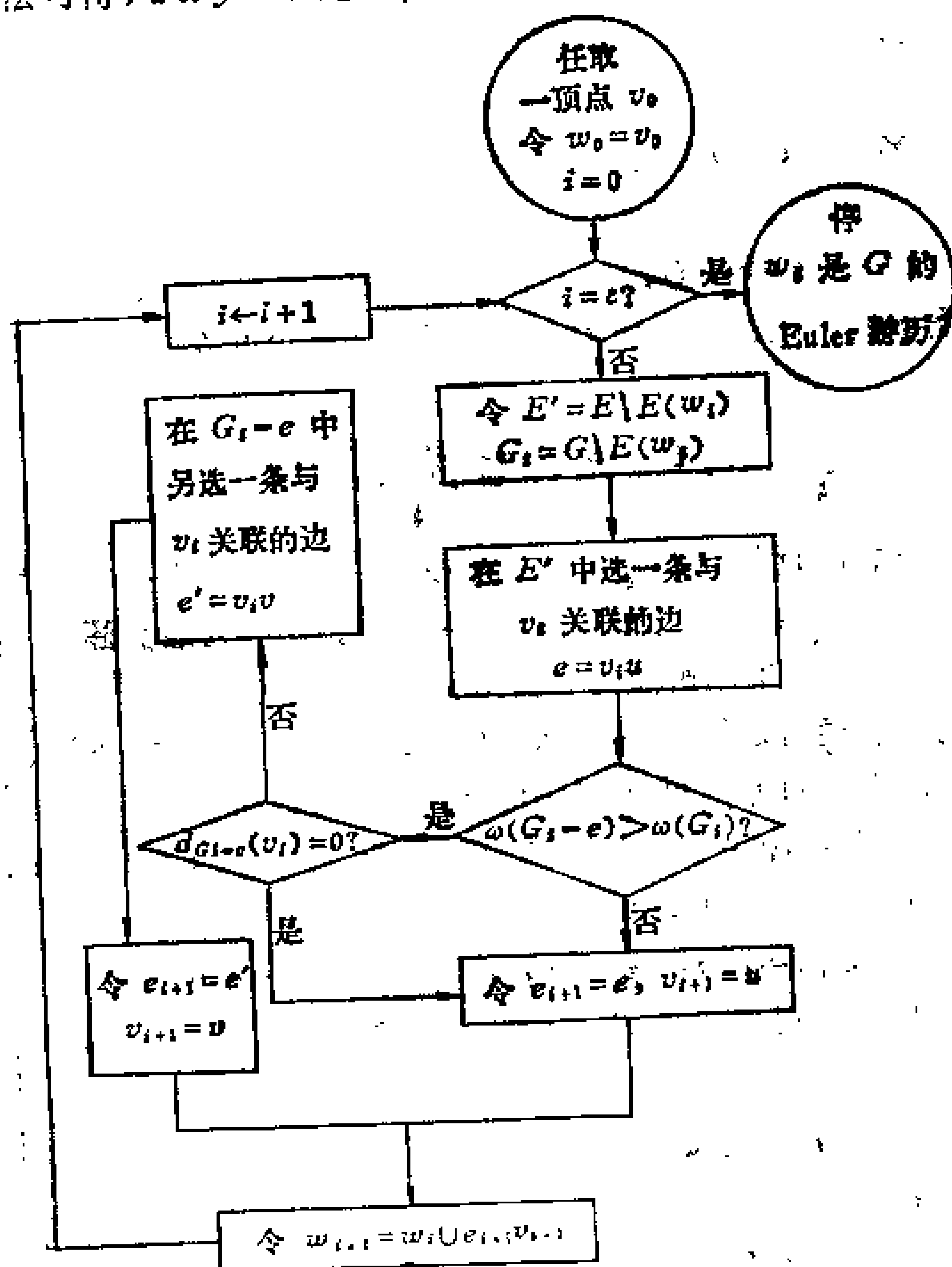
4.3.1 证明：在图(1)的赋权图中 $x\,u\,y\,w\,v\,z\,w\,y\,x\,u\,w$



4.3.1 图

$v\ x\ z\ y\ x$是一条最优游历。

证： 因为图(1)只有两个奇数度顶点 u, v, 根据最短路算法可得，$u\ x\ y\ w\ v$ 是G中最小权(u, v)-路。而图(2)是由



4.3.2 框图

图(1)将最小权(u,v)-路的每一条边都加倍得到的。所以使加倍边的权和最小。由于给定的游历是图(2)的Euler游历，因而给定的游历是图(1)的最优游历。

4.3.2 画出Fleury算法的框图，并说明它是一个好算法。

解： Fleury算法的框图如前页图所示：

这个算法需循环ε次，每次循环中最大的运算量是在判别$\omega(G_i-e)>\omega(G_i)$这一框，由练习1.8.6知，该框是$\nu^2$数量级的。故这算法是$\varepsilon\nu^2$数量级的，是个好算法。

4.4 旅行售货员问题

旅行售货员问题是在一个赋权的完全图中(有些权可为∞)，找出一条最小权的Hamilton循，常称为**最优圈**。

目前尚没有求解旅行售货员问题的好算法。求近似最优圈的方法通常是从一条Hamilton圈出发，修改两条边，得到较小权的另一Hamilton圈。这种修改法如下：

设$C=v_1v_2\cdots v_\nu v_1$，则对所有满足$1<i+1<j<\nu$的i，j，可得一条新的Hamilton圈如下：

$$C_{ij}=v_1v_2\cdots v_iv_jv_{j-1}\cdots v_{i+1}v_{j+1}\cdots v_\nu v_1$$

它是从C中删去v_iv_{i+1}，v_jv_{j+1}，增添v_iv_j，$v_{i+1}v_{j+1}$得到的。

若$w(v_iv_j)+w(v_{i+1}v_{j+1})<w(v_iv_{i+1})+w(v_jv_{j+1})$，则$C_{ij}$就是$C$的一个改进。

4.4.1 设G是赋权的完全图，且对任意$x,y,z\in V(G)$满足三角不等式

$$w(x,y)+w(y,z)\geqslant w(x,z)$$

证明：G 中最优圈最多具有权 $2w(T)$，其中 T 是 G 的一棵最优树。

(D. J. Rosencrantz, R.E.Stearns, P.M. Lewis)

证：设 T 是 G 中的一棵最优生成树，将 T 的每边加倍得到图 T'，则 T' 的每个顶点的度数均为偶数。所以 T' 有一Euler 游历。

$$Q=(v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1) \qquad (n>\nu)$$

Q 中某些顶点可能有重复，且 $w(Q)=2w(T)$。在Q中，从 v_2 开始，凡前面出现过的顶点全部删去，得到 G 的 ν 个顶点的一个排列 π。由于 G 是完全的，所以 π 可以看成 G 中的一个 Hamilton 圈。在 π 中任意边 (u,v)，在 T 中对应存在唯一的(u,v)-路 P，由权的三角不等式有 $w(u,v)\leqslant w(P)$。由于将 π 中的边(u, v)用 T 中的 P 来代替时，就得到 Q，因而 $w(\pi)\leqslant w(Q)=2w(T)$，故 G 中的最优圈 C 的权 $w(C)\leqslant w(\pi)\leqslant 2w(T)$。

第五章 匹 配

5.1 匹 配

定义：图 G 中的一个子集 $M \supset E$，若它的元素均是杆，且 M 中的元素互不相邻，则称 M 是 G 的一个**匹配**。M 中的杆的两端称为**在 M 下被匹配**。若 $v \in V$ 被 M 匹配，则称 v 是**M-饱和的**。反之称 v 是**M-不饱和的**。

定义：若 G 中每一顶点均 M-饱和，则称 M 是 G 的**完美匹配**。

定义：若 G 中不存在匹配 M'，使 $|M'| > |M|$，则称 M 是 G 的**最大匹配**。

定义：设 M 是 G 的一个匹配，若 G 中的一条路的边分别交替地属于 M 和 $E \setminus M$。则称该路是 G 中的一条**M-交错路**。若 G 中的一条 M-交错路的起点和终点均是 M-不饱和的，则称该路是 G 中的一条**M-增广路**。

定理 5.1 (C.Berge 1957)M 是 G 的最大匹配的充要条件是 G 中不含有 M-增广路。

(匹配理论的进一步内容如 f-因子理论等，可参阅 W. T. Tutte,《Graph Factprs》, Combinatorica (1981) 79-97，或 C.Berge,《Graphs and Hypergraphs》(1973) 中有关章节。)

5.1.1 (a)证明 k-方体有完美匹配($k\geq2$)。

(b)求 K_{2n}，$K_{n,n}$ 中不相同的完美匹配的个数。

证：(a)设 k-方体的顶点坐标为$(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，我们取$(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, 0)$和$(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, 1)$两顶点间之边的全体所成之集合为 M，显然 M 中的边均不相邻，所以 M 是一个匹配，且 $|M|=2^{k-1}$。由于 k-方体的顶点一共有 2^k 个，故 k-方体中每一个顶点均是 M-饱和的，所以 M 是 k-方体的完美匹配。

(b)对 K_{2n} 中的任一顶点它有 $2n-1$ 种方法被匹配，一旦选定某一边属于 M 之后，剩下来尚有$2(n-1)$个顶点，它们的导出子图是 $K_{2(n-1)}$。故易由归纳法知 K_{2n} 的不同的完美匹配共$(2n-1)!!$ 个。对于 $K_{n,n}$ 类似地用归纳法，并注意到 $K_{n,n}$ 中的任一顶点有 n 种方法匹配，一旦选定某一边属于 M 之后，剩下来尚有 $2(n-1)$个顶点，它们的导出子图为 $K_{n-1,n-1}$，所以 $K_{n,n}$ 的不同的完美匹配共 $n!$ 种。

5.1.2 证明树至多有一个完美匹配。

证：若树 T 存在两个相异的完美匹配 M_1 和 M_2，则 $M_1\Delta M_2\neq\Phi$ 且 $T[M_1\Delta M_2]$中的每个顶点的度为 2，由练习 1.7.2 知 T 中包含圈，这和 T 是树相矛盾。

5.1.3 对每个 $k>1$ 找出一个没有完美匹配的 k-正则单图 G 的例子。

解：当 k=偶数时，取$G=K_{k+1}$，由于奇数个顶点的图不可能存在完美匹配，故 G 满足要求。当 k=奇数时，作G如下：取 $2k-1$ 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k-1}$，在奇足标顶点和偶足标顶点间两两连以边外，再连以 v_1v_3，v_5v_7，$\cdots$，

v_{2k-3}，v_{2k-2}边。所得之图记为 G_0。显然 G_0 除 v_{2k-1} 外其余顶点的度均为 k，而 $d_{G_0}(v_{2k-1})=k-1$。取 k 个两两不相交的 G_0 的拷贝和一个新顶点 v_0，并把每个 G_0 拷贝中对应于 v_{2k-1} 的顶点和 v_0 相连以边。最后我们所得之图记为 G，显然 G 是 k-正则的单图。又由于 G_0 含 $2k-1$ 个顶点，若 G 存在完美匹配 M，则 M 在 G_0 中至多能取 $k-1$ 条边，从而加上 v_0 被匹配的一边，$|M|\leqslant(k-1)k+1$；而另一方面当 $k>1$ 时，$\nu(G)=(2k-1)k+1>2(k^2-k+1)\geqslant 2|M|$，这和 $|M|=\nu/2$ 相矛盾。故 G 不可能存在完美匹配。

5.1.4 两人在图 G 上进行博奕，交替选择不相同的顶点 v_0，v_1，v_2，…，使得 $i>0$ 时 v_i 要和 v_{i-1} 相邻，直到不能选到顶点为止，最后选到顶点的人为赢。证明第一个选点之人有一个赢的策略的充要条件是 G 中不存在完美匹配。

证：$\Longrightarrow$：用反证法，假如 G 中存在一个完美匹配 M。即 G 中任一点恒是 M-饱和的，故不管第一人如何取 v_{i-1}，第二人永远可取 M 中和 v_{i-1} 相关联边的另一端点作为 v_i。故第一人必输。所以要第一人有一个赢的策略，G 中不能存在完美匹配。

$\Longleftarrow$：若 G 不存在完美匹配，则我们任取 G 的一个最大匹配 M。令 v_0 是 M-不饱和点，第一人首先取 v_0 点，然后往下不论第二人如何取 v_{i-1}，由于 M 是最大的，则 v_{i-1} 恒是 M-饱和点，故第一人永远可取 M 中和 v_{i-1} 相关联边的另一端点作为 v_i。按定理5.1，这样取法保证了最后一点一定是第一人所取，否则就得 M-增广路，而与 M 是最大

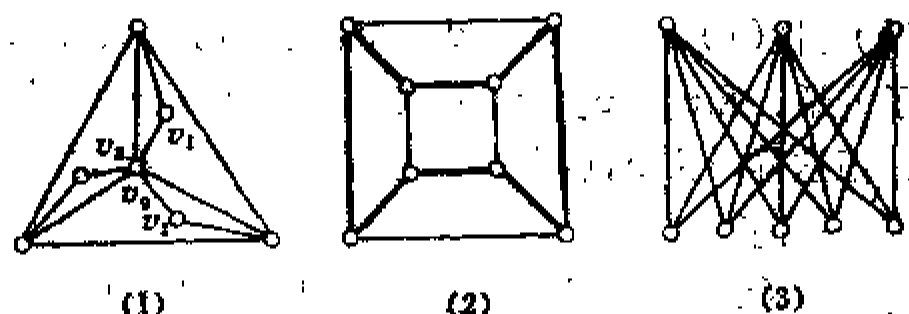
的矛盾。故这种取法是第一人必赢的一种策略。

5.1.5 G 的**k-因子**是 G 的 k-正则生成子图。G 称为**可 k-因子化的**，若存在边不相交的 k-因子 $H_1, H_2, \cdots, H_n$，有 $G = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$。

(a)证明：(i)$K_{n,n}$ 和 K_{2n} 是可 1-因子化的。

(ii)Petersen 图不是可 1-因子化的。

(b)下列图有 2-因子吗？



5.1.5 (b) 图

(c)用Dirac 定理(即定理 4.3)证明：若 G 是 ν 为偶数且 $\delta \geqslant \nu/2+1$ 的单图，则 G 有 3-因子。

证：(a) (i)对于 $K_{n,n}$ 为叙述方便，我们把顶点的分划 (X, Y) 中的 X，Y 的顶点分别加以 0，1，2，…，$n-1$ 的编号，记 (i, j) 是 X 中的 i 和 Y 的 j 相连的边。显然 $\{(i, i+k(\bmod n))\}$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 是 $K_{n,n}$ 中的 1-因子，且不同的 k 对应 $K_{n,n}$ 中边不相交的不同的 1-因子。当 k 取遍 0，1，2，…，$n-1$ 时，$K_{n,n}$ 中的边亦被取尽。故 $K_{n,n}$ 是可 1-因子化的。

对于 K_{2n}，我们将 K_{2n} 中 $v_1, v_2, \cdots, v_{2n-1}$ 个顶点安排在一个 $2n-1$ 正多边形顶点上，v_0 位于这正多边形的

中心。对任一i，取v_0v_i边，以及和v_0v_i相垂直的边，即边$v_{i-k}v_{i+k}$，($k=1, 2, \cdots, n-1$)，其中顶点的足标理解成模$2n-1$的同余。显然这几条边构成K_{2n}中的一个1-因子F_i，且$i\neq j$时，F_i和F_j的边不相交，$K_{2n}=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_{2n-1}$，故$K_{2n}$是可1-因子化的。

(ii)因为对Petesen图任去一个1-因子后，就成为两个不相交的5-圈，从而再没有1-因子了，故它不是可1-因子化的。

(b)对图(1)，图中v_1，v_2，v_3的度均为2，故若存在2-因子的话，和v_1，v_2，v_3关联的边均应属于图的任一个2-因子，但这样一来v_0点在2-因子中度为3，矛盾，故图(1)不存在2-因子。

对于图(2)，图中粗边构成图的Hamilton圈，故它有2-因子。

对于图(3)，它是2-部图，且二部分划(X, Y)中的顶点数不等，$|X|=3$，$|Y|=5$。另一方面，若它存在2-因子F，应有$\sum_{v\in X} d_F(v)=2|X|=\sum_{v\in Y} d_F(v)=2|Y|$，矛盾，故它不可能存在2-因子。

(c)由定理4.3知，G存在Hamilton圈C，又由于ν是偶数，故C是偶数长的圈，在C上相间地取边，将C分成G的两个1-因子，取其中一个记为F_1。令$G_1=G\setminus F_1$，显然$\delta(G_1)\geqslant\nu/2$，于是再由定理4.3知$G_1$还存在Hamilton圈$F_2$。令$F_3=F_1\cup F_2$，则$F_3$是$G$的3-因子。

5.1.6 证明K_{2n+1}可表示成n个连通的2-因子的并($n\geqslant1$)。

证：把 K_{2n+1} 中 $2n+1$ 个顶点编号，记以 0，1，2，…，$2n$，将 0 放在圆心，而其余 $2n$ 个顶点均匀地放在圆周上。令 $C_1=0\ 1\ 2(2n)3(2n-1)4(2n-2)\cdots n(n+2)(n+1)0$，$C_1$ 是 K_{2n+1} 的一个 2-因子，将 C_1 以 0 为心按逆时针每旋转一个顶点，就产生一个新的 2-因子，于是旋转 n 次后共产生 n 个 2-因子，记为 C_1，C_2，…，C_n，显然 C_i 之间两两边不相交，且 $G=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$。

5.2 2-部图的匹配和覆盖

定义： G 中关于 $S(\subseteq V(G))$ 的邻集 $N_G(S)=\{v \mid v\in V(G)$，$v$ 和 S 中的顶点相邻$\}$。

定义： G 中的一个顶点子集 $K\subseteq V$，若 G 中的任一边至少有一个端点含于 K 中，则 K 称为 G 的一个覆盖。

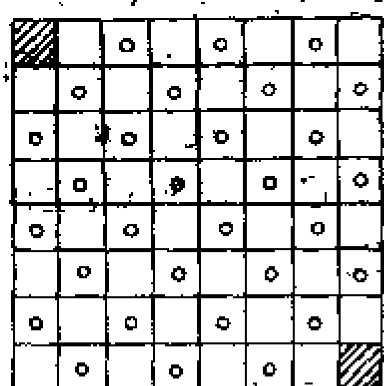
定理 5.2（Hall 定理） 设 G 是一个具有分划 (X, Y) 的 2-部图，则 G 中存在匹配使 X 中的顶点均饱和的充要条件是：$|N(S)|\geqslant|S|$ 对一切 $S\subseteq X$ 成立。

系5.2 若 G 是 k-正则 2-部图$(k>0)$，则 G 有完美匹配。

定理 5.3 （König 定理） 若 G 是 2-部图，则 G 的最大匹配 M^* 和最小覆盖 $\tilde{K}$ 成立 $|M^*|=|\tilde{K}|$。

（满足等式 $|M^*|=|\tilde{K}|$ 的图称具有 König 性质，其充要条件已得到，可参阅：F. Sterboul，《A Characterization of graphs in which the transversal number equals the matching number》，J. Comb. Theory. B27 (1979) 228-229.）

5.2.1 证明：一个 8×8 正方形删去 2 个位于对角上的 1×1 的小正方形后，不能用 1×2 长方形恰好遮盖住。



5.2.1 图

证：如图所示，若我们将无圈方格和有圈方格看成顶点，它们的全体分别记为 X，Y。若无圈方格和有圈方格有公共边相邻，则对应的顶点连以边。于是上述的图形就诱导出一个以(X, Y)为分划的 2-部图 G，且$|X| = |Y| + 2$，故 G 不可能存在完美匹配。由 G 的边的定义知，1×2 长方形恰代表 G 中之一边。故由 G 中不存在完美匹配知，原图不可能用 1×2 长方形恰好来覆盖。

（事实上，图中删去任何两个有圈方格或无圈方格，都不能用 1×2 长方形恰好遮盖住。）

5.2.2 (a) 2-部图 G 有完美匹配的充要条件是对任意 $S \subseteq V$ 有 $|N(S)| \geqslant |S|$。

(b) 给出一个例子说明上述命题当 G 不是 2-部图时不一定成立。

证：(a) $\Longrightarrow$：若 G 有完美匹配 M，则对任意的 $S \subseteq V$，有 $|N_G(S)| \geqslant |N_M(S)| = |S|$。

$\Longleftarrow$：设 2-部图 G 的二部分划为(X, Y)，取 $S = X$，有 $|X| = |S| \leqslant |N(S)| \leqslant |Y|$；类似有 $|Y| \leqslant |X|$，故 $|X| = |Y|$。又对 $S \subseteq X$，有 $|N(S)| \geqslant |S|$，依定理 5.2 存在饱和 X 的匹配，由于 $|X| = |Y|$，这匹配是完美的。

(b) 易直接验证 K_{2n+1} 对任意的 $S \subseteq V$ 均满足 $|N(S)| \geqslant |S|$，但它无完美匹配。

5.2.3　对于 $k>0$，证明：

(a)每个 k-正则 2-部图是可 1-因子化的。

(J. Petersen)

(b)每一个 $2k$-正则图，是可 2-因子化的。

证，(a) 由系 5.2 知，k-正则 2-部图 G 有完美匹配 M_1，于是考虑 $G-M_1$，它为(k-1)-正则 2-部图，故它有完美匹配 M_2，于是再考虑 $G-\{M_1+M_2\}$，如此继续下去，共进行 k 次，最后我们得 M_1，M_2，…，M_k 共 k 个边不相交的 G 的 1-因子，且 $G=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_k$，故 G 是可 1-因子化的。

(b) 若 G 是 $2k$-正则图，则由定理 4.1 G 中存在 Euler 游历 C。设 G 的顶点是$\{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$，今由 C 来构作一个 2-部图 G'，其分划为(X，Y)：$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_\nu\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_\nu\}$。$x_i$ 和 y_j 在 G' 中相连以边的充要条件是 v_i，v_j 在 C 中顺次地相连，于是 G' 构成一个 k-正则 2-部图，由(a)知 G' 是可 1-因子化的。注意到 G' 中的 1-因子对应于 G 中是一个 2-因子。故 G 是可 2-因子化的。

5.2.4　令 A_1，A_2，…，A_m 是 S 的子集，对簇(A_1，A_2，…，A_m)的**不同代表系**是 S 的子集$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，其中 $a_i\in A_i$，$1\leqslant i\leqslant m$；且 $i\neq j$ 时 $a_i\neq a_j$。证明：(A_1，A_2，…，A_m)有不同代表系的充要条件是对$\{1, 2, \cdots, m\}$的任意子集合 J 成立 $|\bigcup_{i\in J}A_i|\geqslant|J|$。

(P. Hall)

证：我们构作 2-部图 G 如下，G 的分划为(X，Y)，X 中的元素是$\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，$Y=S$，$A_i$ 和 a_j 间连以

边的充要条件是 $a_R \in A_i$。显然，$\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 有不同代表系相当于 G 中有饱和 X 的匹配。易验证对 G 讲，$|\bigcup_{i\in J} A_i| \geqslant |J|$ 就是定理 5.2 中相对应的条件，故由定理5.2得证。

5.2.5 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条**线**。证明：$(0,1)$-矩阵中包含矩阵的所有"1"的线集的最小条数，等于没有两个在同一条线上的"1"的最大个数。

证：构作一个 2-部图 G，其分划 (X, Y) 中的 X，Y 分别为矩阵的行线集和列线集。两顶点相连的充要条件是对应两线含有公共的"1"。显然矩阵中的"1"对应 G 中一条边，不同的"1"对应 G 中不同的边，于是 $(0,1)$-矩阵中包含矩阵的所有"1"的线集，对应在 G 中是一个顶点覆盖。没有两个在同一线上的"1"的集合对应在 G 中是一个匹配。对 G 应用定理 5.3，就得本题结论。

5.2.6 (a) 证明 Hall 定理 5.2 的如下推广：若 G 是一个分划为 (X, Y) 的2-部图，则 G 的最大匹配的边数等于 $|X| - \max_{S\subseteq X}\{|S| - |N(S)|\}$。　　　　D. König, O.Ore)

(b) 推导：若 G 是 $|X| = |Y| = n$，且 $e > (k-1)n$ 的单图，则 G 含有 k 条边的匹配。

证：(a) 令 $B = X - S$，于是 $|X| - \max_{S\subseteq X}\{|S| - |N(S)|\}$

$$= \min_{S\subseteq X}\{|X| - |S| + |N(S)|\} = \min_{B\subseteq X}\{|B| + |N(X-B)|\}。$$

显然 $B \cup N(X-B)$ 是 G 的一个覆盖，且 G 的任一最小覆盖均取 $B \cup N(X-B)$ 的形式。故由定理 5.3 知，G 的最大匹配

M^*的边数等于$|X|-\max\limits_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$。

(b)因为$|X|=|Y|=n$，故$\Delta(G)\leqslant n$，所以G的每一个顶点最多覆盖G中n条边。由于$\varepsilon>(k-1)n$，故G中至少要不少于k个顶点才能覆盖G的边。由定理5.3知G的最大匹配不少于k条边。故命题成立。

5.2.7 从König定理5.3推导Hall定理5.2。

证：由练习5.2.6(a)知，G的最大匹配M^*满足：$|M^*|=|X|-\max\limits_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$，而饱和$X$的匹配是最大匹配；因而，存在饱和$X$的匹配的充要条件是$\max\limits_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}=0$。即，对任意$S\subseteq X$，有$|N(S)|\geqslant|S|$。

5.2.8 非负实矩阵Q，若它的行和与列和均为1，则Q称为**双随机矩阵**。若(0,1)-矩阵的每行和每列都恰含有一个"1"，则称为**置换矩阵**。(故每一个置换矩阵是双随机的)。

证明：

(a)每个双随机矩阵必须是方阵。

(b)每一个双随机矩阵Q能表示成置换矩阵的凸线性组合，即$Q=c_1P_1+c_2P_2+\cdots+c_kP_k$，这儿$P_i$是置换矩阵，$c_i$是非负实数且$\sum\limits_{i=1}^{k}c_i=1$。

(G.Birkhoff, J.Von Neumann)

证：(a)由于$Q_{m\times n}$的行和与列和均为1，故有

$n=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}q_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\right)=m$，所以 Q 是方阵。

(b)构作一个 2-部图 G，它的分划为 (X,Y)。X 中的元素为 Q 中的行，Y 中的元素为 Q 中之列，$x_i\in X$，$y_j\in Y$ 相连以边的充要条件是 $Q=(q_{ij})$ 中 $q_{ij}\neq 0$。对任意的 $S\subseteq X$，S 中对应的行中的非零元素之和为 $|S|$，而对应的 $N(S)$ 中至少含 $|S|$ 列才能覆盖这些 S 中对应行中的非零元素，所以有 $|N(S)|\geqslant|S|$。由定理 2.5 知存在匹配 M，使 X 中点在 M 下均饱和。由(a)知 $|X|=|Y|$，故 M 是 G 的一个完美匹配，M 中的边对应在 Q 中的元素为 $q_{1i_1},q_{2i_2},\cdots,q_{ni_n}>0$。令 $c_1=\min_k\{q_{ki_k}\}>0$，P_1 是 $\begin{pmatrix}1 & 2\cdots & n\\ i_1 & i_2\cdots & i_n\end{pmatrix}$ 对应的置换矩阵。又令 $Q_1=Q-c_1P_1$，若 $Q_1=0$，则命题已成立。若 $Q_1\neq 0$，则显然 $c_1<1$，且 Q_1 仍为非负矩阵。于是 $Q_1/(1-c_1)$ 仍为双随机矩阵，从而对 $Q_1/(1-c_1)$ 可重复上述过程，由于每进行一次对应，矩阵中的元素至少增加一个零元素，从而经过有限次后，不妨设为 k 次后，$Q_k=0$，所以 $Q=c_1P_1+c_2P_2+\cdots+c_kP_k$。又因 $\sum_{i=1}^{n}q_{i1}=1=c_1\sum_{i=1}^{n}p_{i1}(1)+c_2\sum_{i=1}^{n}p_{i1}(2)+\cdots+c_k\sum_{i=1}^{n}p_{i1}(k)=c_1+c_2+\cdots+c_k$。故命题成立。

5.2.9 设 H 是一个有限群，K 是 H 的子群，证明：存在元素 $h_1,h_2,\cdots,h_n\in H$，使得 $h_1K,h_2K,\cdots,h_nK$ 构成 K 的左陪集簇。$Kh_1,Kh_2,\cdots,Kh_n$ 构成 K 的

右陪集簇。 (P. Hall)

证：M 中任意两个左陪集，aK，bK 或恒等或两左陪集之间没有公共元素。对右陪集亦有类似性质。从而 H 可按左(右)陪集分解成没有公共元素的左(右)陪集簇。它的个数等于商群 H/K 的元素个数记，为 n。且每个左(右)陪集中的元素个数等于 K 的元素个数，记为 k。今我们构作一个 2-部图 G，其分划为(X, Y)，其中 X 是 H 关于子群 K 的左陪集簇，Y 是 H 关于 K 的右陪集簇。若 $x\in X$，$y\in Y$，x 与 y 相连以 l 条边的充要条件是左陪集 x 和右陪集 y 有 l 个公共元素。由定义显然 G 是一个 k-正则 2-部图，故由系 5.2 知，G 存在完美匹配 M，$|M|=n$。在 M 中的边 e_i 两端点的左、右陪集之公共元素中任取一元素记为 h_i，则这些 $h_1, h_2, \cdots, h_n\in H$，即为所求之元素。

5.3 完美匹配

定理 5.4 G 具有完美匹配的充要条件是对任意的 $S\subset V$，图 $G-S$ 的奇分支的个数 $O(G-S)\leq|S|$。

系 5.4 无割边的 3-正则图存在完美匹配。

5.3.1 由 Tutte 定理 5.4 证明 Hall 定理 5.2

证：设 G 是以(X, Y)为分划的 2-部图。在 G 的基础上，当 $\nu=$偶数时，增加新的边构作图 H，使 $H[Y]$ 成为完全图。当 $\nu=$奇数时，则在 G 外增加一新的孤立顶点 y_0，然后增加新边使 $H[Y\cup\{y_0\}]$ 成完全图。最后所得之图记为 H。易直接验证 G 中存在匹配 M 使 X 的点均饱和的充要条件是 H

存在完美匹配。从而Hall定理5.2等价于："H存在完美匹配的充要条件是对任给的$S\subseteq X$，成立$|N_H(S)|\geqslant|S|$"。下面我们来证明此命题：

$\Longrightarrow$：对任给的$S\subseteq X$，令$S_1=N_H(S)$，于是$H-S_1$中S的每一顶点均是一个奇分支。由定理5.4知$|S_1|\geqslant O(H-S_1)\geqslant|S|$，即$|N_H(S)|\geqslant|S|$。

$\Longleftarrow$：首先由假设条件对$\forall x\in X$，$|N(\{x\})|\geqslant|\{x\}|=1$，故$X$中无孤立点；其次对任意的$S\subseteq V$，设$S=S_1+\bar{S}_2$，$S_1\subseteq X$，$\bar{S}_2\subseteq Y$。令$S_2\subseteq X$是满足$N_H(S_2)\subseteq\bar{S}_2\subseteq Y$的最大点集。故由假设条件有$|\bar{S}_2|\geqslant|N_H(S_2)|\geqslant|S_2|$。$H-\bar{S}_2$共$|S_2|+1$个分支，且其中$|S_2|$个分支是孤立顶点。设剩下的那个非孤立顶点的分支记为H_1，显然H_1-S_1仍为一分支，考虑到S_1和S_2可能相交，故当H_1-S_1是奇分支时，$O(H-S)\leqslant1+|S_2|$；当H_1-S_1是偶分支时，$O(H-S)\leqslant|S_2|$。下面我们分情况加以讨论：①$S_1\neq\Phi$，于是$|S|=|S_1|+|\bar{S}_2|\geqslant1+|S_2|\geqslant O(H-S)$。②$S_1=\Phi$。若$|\bar{S}_2|\geqslant1+|S_2|$，于是$|S|=|\bar{S}_2|\geqslant1+|S_2|\geqslant O(H-S)$。若$|\bar{S}_2|=|S_2|$，这时由于$\nu(H)$是偶数，$H_1-S_1$是偶分支，于是$|S|=|\bar{S}_2|=|S_2|=O(H-S)$。综合上述对任意的$S\subseteq V$，恒有$|S|\geqslant O(H-S)$，故由定理5.4知$H$存在完美匹配。

所以等价命题成立，故Hall定理5.2也成立。

5.3.2　证明系5.4的推广命题："若G是$(k-1)$-边连通k-正则图，且ν=偶数，则G有完美匹配"。

证：当$k=1$时命题显然成立。故下面假定$k\geqslant2$，令S是V的非空子集，记G_1，G_2，…，G_n是$G-S$的所有奇分支。$O(G-S)=n$。又令m_i是G_i和S间的相连边数。

于是由于 G 是 k-正则的，我们有：

$$m_i=\sum_{v\in V(G_i)} d(v)-2e(G_i)=k|V(G_i)|-2e(G_i)$$

$$\equiv\begin{cases}奇数 & k=奇数\\ 偶数, & k=偶数\end{cases}$$

即 m_i 和 $k-1$ 有相异的奇偶性。今由假设 G 是$(k-1)$-边连通，故 G_i 与 S 至少有 $k-1$ 条边相连。所以有 $m_i\geqslant k$。于是我们有 $O(G-S)=n\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} m_i\leqslant\frac{1}{k}\sum_{v\in S} d(v)=|S|$。

当 $S=\Phi$ 时由于 $\nu=$偶数，故 $O(G-S)=O(G)=0=|\Phi|$。所以对任意的 $S\subseteq V(G)$，$O(G-S)\leqslant|S|$ 均成立。于是由定理 5.4 知，G 具有完美匹配。

5.3.3 树 G 具有完美匹配的充要条件是对任意 $v\in V$，均成立 $O(G-v)=1$。 (V. Chungphaisan)

证 ⇒：设 G 具有完美匹配，则由定理 5.4 知 $O(G-v)\leqslant|\{v\}|=1$，且 $\nu(G)$ 为偶数，从而 $\nu(G-v)$ 为奇数，故 $O(G-v)\geqslant1$，所以 $O(G-v)=1$。

⇐：由于对 $\forall v\in V$，有 $O(G-v)=1$，即 $G-v$ 中存在唯一的奇分支 $C_0(v)$，令 v 与 $C_0(v)$ 的关联边为 $e(v)=vu$，显然 v 确定后，$e(v)$ 是唯一确定的，且易知 $e(u)=uv$，于是 $M=\{e(v)\}$ 恰构成 G 的一个完美匹配。

5.3.4 证明 Tutte 定理 5.4 的如下推广：图 G 的最大匹配的边数等于 $(\nu-d)/2$，其中 $d=\max_{S\subseteq V}\{O(G-S)-|S|\}$。

(C. Berge)

证：不失一般性，可假定 G 是连通的。今分二种情况验证如下：

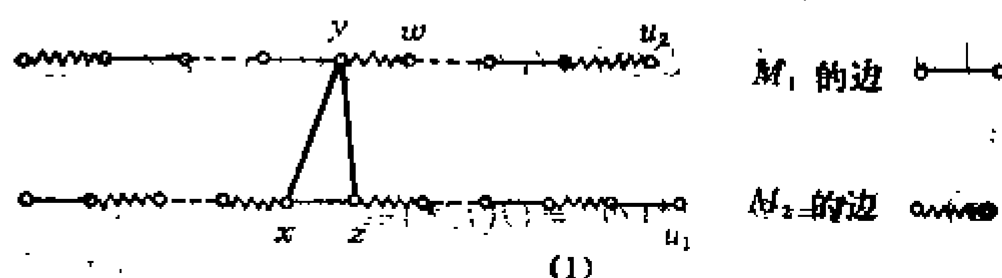
（一）若 G 有完美匹配 M，则 M 是最大匹配，由定理 5.4，对一切 $S\subset V$ 有 $O(G-S)\leqslant|S|$。特别当 $S=\phi$ 时 $O(G)=|\phi|=0$，故 $d=\max\limits_{S\subset V}(O(G-S)-|S|)=0$，$|M|=\nu/2=(\nu-d)/2$ 成立。

（二）若 G 是无完美匹配的连通图。设 G^* 是由 G 尽可能增添一些边，使得 G^* 与 G 的最大匹配的边数相同的极大生成母图。显然，G^* 也无完美匹配。设 $U=\{u\,|\,u\in V(G^*),\ d_{G^*}(u)=\nu-1\}$，可知，①$U\neq\phi$，②若 $U\neq V$，则 G^*-U 的各分支是完全图。这是因为：①设 M 是 G^* 的最大匹配，它不是完美匹配，必存在 M 未饱和点 w，w 的邻点 u 是 M 饱和的。否则，M 不是最大匹配。若 $d_{G^*}(u)\leqslant\nu-2$，存在 v 使 $uv\notin E(G^*)$，由 G^* 的最大性，M 不是 G^*+uv 的最大匹配。故在 G^*+uv 上必存在一条经过 uv 的 M-增广路，$v_0\cdots vu\cdots v_n$，取其中 $vu\cdots v_n$ 段，并将 v 换成 w，得到 G^* 上的一条 M-增广路，这与 M 是 G^* 的最大匹配矛盾；故 $d_{G^*}(u)=\nu-1$，$U\neq\phi$。②若 $U\neq V$，而 G^*-U 的某一分支不是完全图，则由练习 1.6.14 在此分支中存在顶点 x，y，z 使 xy，$yz\in E(G^*)$，$xz\notin E(G^*)$。又因 $y\notin U$，在 G^*-U 中存在 w 使 $yw\notin E(G^*)$。由于 G^* 的极大性，G^*+xz 和 G^*+yw 的最大匹配 M_1，M_2 的边数一定大于 G^* 的最大匹配的边数，且 M_1，M_2 分别包含 xz，yw。令 H 是由 $M_1\Delta M_2$ 在 $G^*+\{xz,\ yw\}$ 图上导出的子图，则 H 中每顶点的

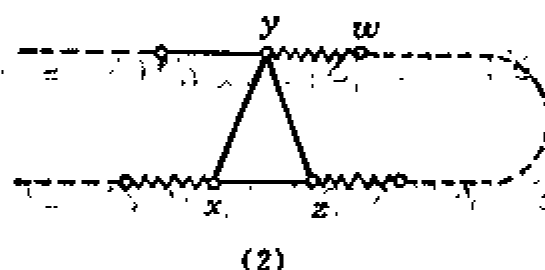
度为1或2，且H的每一支均是路或圈，它们都是M_1，M_2的边的交错路。故各交错路上M_1的边数与M_2的边数最多相差1。分两种情况导出矛盾：

情况1．若xz和yw在H的不同分支中。记这两分支为H_{xz}，H_{yw}。

若H_{xz}中M_1的边数不超过M_2的边数，我们在H_{xz}中取M_2的边连同H_{xz}外的M_1的边一起组成了G^*的一个匹配，其边数不少于$|M_1|$，这与G^*的极大性矛盾！故H_{xz}中M_1的边数大于M_2的边数。同理H_{yw}中M_2的边数大于M_1的边数（见图(1)）。



(1)



(2)

图 5.3.4

这时，如图(1)所示，在$(u_1, \cdots, z, y, w, \cdots, u_2)$的路上取$yz$及$M_1$的边，连同此路外$M_2$的边一起组成了$G^*$的一个匹配，其边数等于$|M_2|$，这又与$G^*$极大性矛盾！故

情况1不可能。

情况2．若 xz 和 yw 在 H 的同一分支 C 中。由 x 和 z 的对称性，故 x，y，z，w 在 C 中的出现顺序仅两种可能。当 y，w，z，x 依次出现在 C 中时（见图(2)），取 yz 和 $yw\cdots z$ 段中 M_1 的边及 $yw\cdots z$ 段外的 M_2 的边一起组成了 G^* 的一个匹配，其边数等于 $|M_2|$，矛盾！当 z，x，y，w 依次出现在 C 中时，取 yz 和 $zx\cdots y$ 段中 M_2 的边及 $zx\cdots y$ 段外的 M_1 的边，它们组成 G^* 的一个匹配，其边数等于 $|M_1|$，矛盾！

于是，不论什么情况都导致矛盾！可知 G^*-U 的各分支，均是完全图。

下面对任意的 $S\subset V(G^*)$ 考察 $d^*(S)=O(G^*-S)-|S|$：

a)，当 $S=\phi$，$d^*(\phi)=O(G^*)=\begin{cases}1 & \text{当 } v \text{ 奇数}\\ 0 & \text{当 } v \text{ 偶数}\end{cases}$

b)，当 $S\neq\phi$ 且 S 不含 U 时，G^*-S 含 U 的点，可得：

$O(G^*-S)\leqslant 1\leqslant|S|$，故 $d^*(S)=O(G^*-S)-|S|\leqslant 0\leqslant O(G^*)$

c)，当 $S\neq\phi$ 且 $S\supseteq U$ 时，因 G^*-U 各分支是完全图，有：

$$\begin{aligned}O(G^*-S)&=O(G^*-U-(S\setminus U))\\&\leqslant O(G^*-U)+|S\setminus U|\\&=O(G^*-U)+|S|-|U|\end{aligned}$$

故 $d^*(S)=O(G^*-S)-|S|\leqslant O(G^*-U)-|U|$

于是 $d^*=\max\limits_{S\subset V} d^*(S)=\max\{O(G^*), O(G^*-U)-|U|\}$

对 G^*，设它的最大匹配边数为 m，我们证明 $m=(v-d^*)/2$ 如下：

(1) 当 $O(G^*-U)-|U|\leqslant 0$ 时，有，$d^*=O(G^*)$。这时 G^* 的一个最大匹配为：G^*-U 的各分支自己匹配后，各奇分支有一点与 U 中点匹配；U 中多余点，相互匹配后，必还剩下一点，否则与 G^* 无完美匹配矛盾。从而，v 奇数，$d^*=1$，故 $m=(v-1)/2=(v-d^*)/2$。

(2) 当 $O(G^*-U)-|U|>0$ 时，有 $d^*=O(G^*-U)-|U|$。这时，G^* 的一个最大匹配为：G^*-U 各分支自己匹配后，其中奇分支的一点必须与 U 中点匹配，由于 U 中点数不足，必有 d^* 个奇分支中各含一点无法匹配，故 $m=(v-d^*)/2$。

最后，由于 G 是 G^* 的生成子图，故 $O(G^*-S)\leqslant O(G-S)$，从而，$d^*\leqslant d$，$m=(v-d^*)/2\geqslant(v-d)/2$。另一方面，设 $S_0\subset V(G)$ 使 $d=O(G-S_0)-|S_0|$ 成立。因 $d\geqslant 0$，G 的匹配的最大可能是 $G-S_0$ 各分支自己匹配后，其中各奇分支的一点与 S_0 中点匹配，这样，至少还有 d 个奇分支中各一点得不到匹配，故 $m\leqslant(v-d)/2$。从而 $m=(v-d)/2$。

综合上述本题得证。

5.3.5 (a)利用 Tutte 定理5.4来描述无完美匹配的极大单图。

(b)若 G 是单图，且 v 为偶数，$\delta<v/2$，证明：若

$\varepsilon(G)>\binom{\delta}{2}+\binom{\nu-2\delta-1}{2}+\delta(\nu-\delta)$，则 G 具有完美匹配。

证：(a)题目中的"maximal"(极大)一词含意不明确。可以有如下两种理解：(1)理解为 G 中若再增加边时 G 就变成具有完美匹配的图。(2)理解为 ν 个顶点无完美匹配的单图中，边数最多的图。对于 ν 为奇数时，由于任一奇数顶点之单图均无完美匹配，从而，此时不存在理解(1)下的极大单图，而理解(2)下的极大单图为 K_ν。对于 ν 为偶数时，对理解(1)的极大单图 G 就是定理5.4中的 G^*，由于无完美匹配，故存在 $S\subset V(G)$，成立 $O(G-S)>|S|\geqslant 0$，所以 $G-S$ 一定含有奇分支，下面由 G 的极大性得到如下四点结论。(A) $G-S$ 的每一个分支，以及 $G[S]$ 均为完全图。(B) $G-S$ 中不含偶分支。这是因为假如含偶分支，则我们恒可将它与 $G-S$ 的某一奇分支合并添加新边使构成更大的奇分支完全图，最后所得之图记为 G_1，由作法 $O(G_1-S)=O(G-S)>|S|$，故 G_1 仍无完美匹配。这与 G 的极大性相矛盾。(C) $G-S$ 的奇分支只能有 $|S|+2$ 个。这因为假设 $G-S$ 共 k 个奇分支，其奇分支的顶点数分别为 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k$，$k>|S|$，$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k+|S|=\nu=$ 偶数，故 $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k+|S|\equiv(k+|S|)\bmod 2\equiv 0 \pmod 2$。即 k 和 $|S|$ 有相同的奇偶性，所以 $k\geqslant|S|+2$。当 $k\geqslant|S|+4$ 时，在 $G-S$ 中任取 $k-|S|-1$(奇数)个分支，类似(B)中的合并，将它们合并起来而得到与 G 的极大性相矛盾的结论。故 $k=|S|+2$。(D) $G=K_{|S|}\vee(K_{\nu_1}+K_{\nu_2}+\cdots+K_{\nu_{|S|+2}})$。综合($A$)—($D$)，极大单图 G 应为 $K_{|S|}\vee(K_{\nu_1}+K_{\nu_2}+\cdots+K_{\nu_{|S|+2}})$ 其中

$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{|S|+2}$均为奇数，$\nu_1+\nu_2+\cdots\nu_{|S|+2}+|S|=\nu$。对理解(2)的极大单图 G，则要在理解(1)的极大单图基础上进一步考虑。首先我们在 ν，$|S|$ 固定的条件下，任取 $G-S$ 的两个分支 H_1，H_2，它们的顶点数分别为 ν_1，ν_2，$\nu_1+\nu_2=\nu'$。这两分支含的边数为$\binom{\nu_1}{2}+\binom{\nu_2}{2}$，当且仅当 $\nu_1=1$，$\nu_2=\nu'-1$ 或 $\nu_1=\nu'-1$，$\nu_2=1$ 的情况下它达到极大，多次应用这结论，我们知 $G-S$ 的 $|S|+2$ 个分支中当且仅当 $|S|+1$ 个分支取一个顶点，剩下的一个奇分支取 $\nu-2|S|-1$ 个顶点时，$G-S$ 中的边达到极大。此时所得到的图记为 $\tilde{G}$，则 $\varepsilon(\tilde{G})=\binom{|S|}{2}+(\nu-|S|)|S|+\binom{\nu-2|S|-1}{2}$，$0\leqslant|S|\leqslant\frac{\nu}{2}-1$。由简单的极值计算易知，当 $|S|=0$ 时，$\varepsilon(\tilde{G})=\binom{\nu-1}{2}$达到最大值。即 $\tilde{G}$ 是 $K_1\cup K_{\nu-1}$。这就是理解(2)中的极大单图。

(*b*)本题结论是错的，如G是将$K_{(\nu/2-1)}\vee K^c_{(\nu/2+1)}$ ($\nu\geqslant8$，ν为偶数) 除去一条连接$K_{(\nu/2+1)}$到$K^c_{(\nu/2+1)}$之间的边所得之图就是反例。

显然$\varepsilon(G)=\binom{\nu/2-1}{2}+\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\left(\frac{\nu}{2}-1\right)-1=\frac{1}{8}(3\nu^2-6\nu-8)$，$\delta(G)=\frac{\nu}{2}-2$，$\binom{\delta}{2}+\binom{\nu-2\delta-1}{2}+\delta(\nu-\delta)=$

$\frac{1}{8}(3v^2-10v+16)<\varepsilon(G)$。但对 G，若取S为G中$K_{v/2-1}$的$v/2-1$个顶点，则 $O(G-S)=v/2+1>|S|=v/2-1$。故由定理5.4知G不存在完美匹配。

[注]本题结果之所以弄错，主要是因为"极大"的含意不明确。注意到(a)的证明过程中的$\bar{G}$，它是$|S|$固定的条件下的一种无完美匹配的极大单图，且$\delta(\bar{G})=|S|$，于是$\varepsilon(\bar{G})=\binom{\delta}{2}+\binom{v-2\delta-1}{2}+\delta(v-\delta)$。若讨论这种意义下的无完美匹配的单图，当$\varepsilon(G)>\varepsilon(\bar{G})$时，显然由(a)的证明过程知，$G$具有完美匹配。但讨论这种中间类型的无完美匹配的极大单图，意义不大。

5.4 人员工作分配问题

分配n个人做n件工作，每人能做其中的某几件，问能否对所有的人都分配给一件他能做的工作。这就是**人员工作分配问题**。

以顶点x_1，…，x_n表示人，以y_1，…，y_n表示工作。x_i与y_j相连当且仅当x_i会做y_j这项工作。这样一来，问题就化为：求2-部图(X, Y)中饱和X的匹配。用匈牙利算法，可以解决这一问题。

匈牙利算法：从任一匹配M开始。

1． 若X是M-饱和，则停；否则，设u是X中一个M-不饱和顶点，置$S=\{u\}$及$T=\Phi$。

2． 若$N(S)=T$，有$|T|=|S|-1$，故$|N(S)|<|S|$，

停止；这时，不存在饱和 X 的匹配。否则，设 $y\in N(S)\setminus T$。

3. 若 y 是 M-饱和的，设 $yz\in M$，用 $S\cup\{z\}$ 代 S，用 $T\cup\{y\}$ 代 T，转第 2 步；否则，$\exists(u, y)$-交错路是 M-增广路 P，用 $\hat{M}=M\Delta E(P)$ 代 M，转第 1 步。

5.4.1 怎样修改匈牙利算法来求 2-部图的最大匹配？

解：注意到匈牙利算法在一个 M-不饱和点 u 的交错树上出现 $|N(S)|<|S|$ 时，根据 Hall 定理知不存在饱和 X 的匹配而停止。但当求其最大匹配时，应继续检查 $X\setminus S=\Phi$ 否？$X\setminus S$ 还存在其它 M-不饱和点否？一直到所有不饱和点都找不到 M-增广路时，才得到最大匹配。根据这一想法，可修改匈牙利算法以求 2-部图的最大匹配，算法步骤如下：从任一匹配 M 开始。

1. 置 $S=\Phi$，$T=\Phi$；

2. 若 $X\setminus S$ 已 M-饱和，则停；否则，设 u 是 $X\setminus S$ 中的一个 M-不饱和点，置 $S=S\cup\{u\}$。

3. 若 $N(S)=T$，转第 5 步，否则，设 $y\in N(S)\setminus T$。

4. 若 y 是 M-饱和的，设 $yz\in M$，用 $S\cup\{z\}$ 代 S，$T\cup\{y\}$ 代 T，转第 3 步；否则，$\exists(u, y)$-交错路是 M-增广路 P，用 $\hat{M}=M\Delta E(P)$ 代 M，转第 1 步。

5. 若 $X\setminus S=\Phi$ 则停；否则，转第 2 步。

5.5 最优分配问题

在人员分配问题中，把个人的工作效率考虑进去，求使得全体人员工作总效率最大的分配方案，称为**最优分配问**

题。

这问题可化为在赋权完全2-部图(X, Y)上求一个最大权的完美匹配，或称**最优匹配**。这里边$x_i y_j$的权w_{ij}表示人x_i做工作y_j的效率。

定义：给顶点v一个实数$l(v)$，称为顶点v的一个**标记**。一个顶点标记使得每条边的两个端点的标记之和不小于该边的权，称为一个**可行顶点标记**。

定义：若l是一个可行顶点标记，$E_l=\{xy\in E \mid l(x)+l(y)=w(xy)\}$，$G_l=(V, E_l)$称为可行顶点标记$l$的**相等子图**。

定理5.5 设l是G的一个可行顶点标记。若G_l含有一个完美匹配M^*，则M^*是G的最优匹配。

求最优匹配的Kuhn-Munkres算法如下：

由任意的可行顶点标记l开始，决定G_l，在G_l中任选一个匹配M。

1． 若X是M-饱和的，则停（M是最优匹配）；否则，设u是一个M-不饱和点，令$S=\{u\}$，$T=\varnothing$；

2． 若$N_{G_l}(S)\supset T$，则转第3步。否则$N_{G_l}(S)=T$。计算：

$$\alpha_l=\min_{\substack{x\in S\\ y\notin T}}\{l(x)+l(y)-w(xy)\}>0$$

给出另一个可行顶点标记

$$\hat{l}(v)=\begin{cases} l(v)-\alpha_l & \text{当 } v\in S \\ l(v)+\alpha_l & \text{当 } v\in T \\ l(v) & \text{其它} \end{cases}$$

以 $\hat{l}$ 代 l，$G_{\hat{l}}$ 代 G_l。

3． 选择 $N_{G_l}(S)\setminus T$ 中一顶点 y，考察 y 是否 M-饱和？若 M-饱和且 $yz\in M$，用 $S\cup\{z\}$ 代 S，$T\cup\{y\}$ 代 T，转第2步。否则，(u,y)-路是 G_l 中的一条 M-增广路 P，用 $\hat{M}=M\Delta E(P)$ 代 M，转第1步。

5.5.1 $n\times n$ 方阵中两两不同行不同列的 n 个元素的集合称为方阵的一条对角线。对角线的权是它的 n 个元素之和。找出下列矩阵 A 具有最小权的对角线。

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

解： 将方阵的每行视为 X 中一点，每列视为 Y 中一点，方阵的元素即完全2-部图 (X,Y) 的各边的权，方阵的对角线即2-部图的完美匹配。本题即要求最小权的完美匹配。

设 J 为每个元素均为1的5阶方阵，考虑 $13J-A$：

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 8 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

原问题化为求这一权矩阵下2-部图的最优匹配。用 Kuhn-Munkres 算法求解如下：

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & T & T & & & & \\
S & 9^{V} & 8 & \boxed{5} & \boxed{3} & \boxed{2} & 9 \\
 & 6 & 7 & 8 & 6 & 9^{V} & 9 \\
S & 5 & 8 & \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{7} & 8 \\
S & 7 & 7^{V} & \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{6} & 7 \\
S & 9 & 8 & \boxed{6} & \boxed{4} & \boxed{5} & 9 \\
 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 &
\end{array}
$$

方阵外的数字是一可行顶点标记 l，粗体数对应的边是 l 下相等子图 G_l 的边。

· ^{V}表 G_l 中的一个匹配 M 的元素。方阵中由算法得该 M 下，属于 S 的行与属于 T 的列都在矩阵旁标出了。且 $N_{G_l}(S)=T$。

[ ]中的元素是行 x 在 S 中列 y 不在 T 中的元素。

求得 $\alpha_l=1$，得如下页方阵。

故原方阵中元素(1,1)，(2,5)，(3,2)，(4,4)，(5,3)是一个最小权的对角线。

(这题也可在原方阵上求解，只要将可行标记定义改变为一边两端点的标记之和不大于该边的权即可！)。

$$
\begin{array}{c}
T \\
\begin{array}{r}
\\ \\ S \\ S \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccc}
9^{v} & 8 & 5 & 3 & 2 \\
6 & 7 & 8 & 6 & 9^{v} \\
5 & 8 & 1 & 4 & 7 \\
7 & 7^{v} & 0 & 3 & 6 \\
9 & 8 & 6 & 4 & 5
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
8 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \\ 8
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & -1 & -3 & 0
\end{array}
\end{array}
\xrightarrow[P=(x_3,\ y_2,x_4,y_4)]{\text{得}M\text{-增广路}}
\begin{array}{c}
T \\
\begin{array}{r}
S \\ \\ \\ \\ S
\end{array}
\left(\begin{array}{c|cccc}
9^{v} & \boxed{8} & \boxed{5} & \boxed{3} & \boxed{2} \\
6 & 7 & 8 & 6 & 9^{v} \\
5 & 8^{v} & 1 & 4 & 7 \\
7 & 7 & 0 & 3^{v} & 6 \\
9 & \boxed{8} & \boxed{6} & \boxed{4} & \boxed{5}
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
8 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \\ 8
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & -1 & -3 & 0
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\downarrow a_1 = 1
$$

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccc}
9^{v} & 8 & 5 & 3 & 2 \\
6 & 7 & 8 & 6 & 9^{v} \\
5 & 8^{v} & 1 & 4 & 7 \\
7 & 7 & 0 & 3^{v} & 6 \\
9 & 8 & 6^{v} & 4 & 5
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
7 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \\ 7
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
2 & 1 & -1 & -3 & 0
\end{array}
\end{array}
\xleftarrow[P=(x_5,\ y_3)]{\text{得}M\text{-增广路}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ S
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccc}
9^{v} & 8 & 5 & 3 & 2 \\
6 & 7 & 8 & 6 & 9^{v} \\
5 & 8^{v} & 1 & 4 & 7 \\
7 & 7 & 0 & 3^{v} & 6 \\
9 & 8 & 6 & 4 & 5
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
7 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \\ 7
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
2 & 1 & -1 & -3 & 0
\end{array}
\end{array}
$$

第六章 边着色

6.1 边色数

定义：无环图 G 的一个 **k-边着色**是把 $E(G)$ 划分成 k 个子集 $E_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 的一种分法，E_i 中的每边均着以 i 色。如果 G 中任意相邻两边均着以不同颜色，即 E_i 均是 G 中的匹配，则称这 k-边着色是**正常的**，若 G 有正常的 k-边着色，则称 G 为 **k-边可着色的**图。

定义：**边色数** $\chi'(G)$ 是 G 的所有 k-边可着色中最小的 k，若 $\chi'(G)=k$，则称 G 为 **k-边色的**。由定义显然有 $\chi'(G)\geqslant\Delta(G)$。

定义：假如关联顶点 v 的一边着以 i 色，则称 i 色在顶点 v 处**出现**。

定义：给定 G 的 k-边着色 $\mathscr{C}$ 后，用 $c(v)$ 表示在 v 上出现的不同颜色的数目。若不存在另外一个 k-边着色 $\mathscr{C}'$，它在 v 上出现的不同颜色数目为 $c'(v)$，使

$$\sum_{v\in V}c'(v)>\sum_{v\in V}c(v)$$

则称 $\mathscr{C}$ 为 G 的一个**最优 k-边着色**。

引理 6-1-2 设 $\mathscr{C}=(E_1, E_2, \cdots, E_k)$ 是 G 的一个最优 k-边着色。若存在 G 中的一个顶点 u 和不同的颜色

i 及 j，使得 i 色在 u 不出现，而 j 色在 u 至少出现两次，则 $G[E_i \cup E_j]$ 中包含 u 的分支是奇圈。

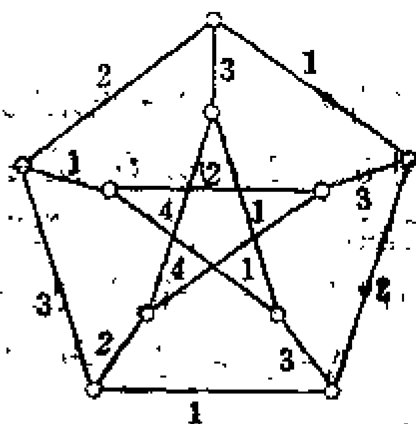
定理6.1 若 G 是2-部图，则 $\chi'(G)=\Delta$。

6.1.1 具体找一个边着色，证明：$\chi'(K_{m,n})=\Delta(K_{m,n})$。

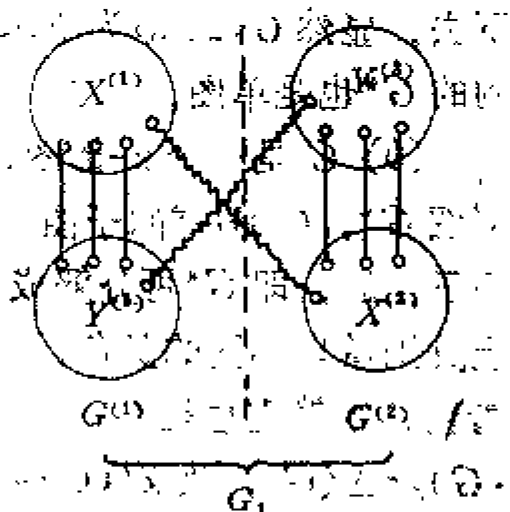
证： 设 $m\geqslant n$。于是 $\Delta(K_{m,n})=m$。令 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，设 $0, 1, \cdots, m-1$ 是 m 种颜色，我们在 x_iy_j 边上着以 $(i+j)(\mathrm{mod}\ m)$ 色，显然这种 m-边着色是正常的，从而我们有 $\chi'(K_{m,n})\leqslant\Delta(K_{m,n})$。另一方面，对任意 G 恒有 $\chi'(G)\geqslant\Delta(G)$。故 $\chi'(K_{m,n})=\Delta(K_{m,n})$。

6.1.2 证明 Petersen 图是4-边色的。

证： 由练习 5.1.5(a)(ii)的结论知 Petersen 图不是可1-因子化的，从而 Petersen 图的边色数 $\chi'>3$。另一方面



6.1.2图



6.1.3图

如图所示它是Petersen图的一种4–边正常着色，故有$\chi'=4$。

6.1.3 (*a*)若G是2–部图，则G是某个Δ–正则2–部图G^*的子图。

(*b*) 利用(*a*)和练习 5.2.3(*a*)给出定理 6.1 的另外一个证明。

证：(*a*) 设G是以(X, Y)为分划的2–部图，$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$。若$G$是正则图，则取$G^*=G$。若$G$不是正则图，于是有$\Delta(G)>\delta(G)$，我们首先将$G$的两个拷贝$G^{(1)}$，$G^{(2)}$用如下方法构作2–部图如图所示，其顶点分划为$(X^{(1)}\cup Y^{(2)}, x^{(2)}\cup Y^{(1)})$，然后将$G$中度小于$\Delta(G)$之顶点，在$G^{(1)}$，$G^{(2)}$中的对应点间连以边(图中以------示之)，最后所得之图记为G_1，由G_1的作法，G_1中之顶点若对应在G中的度为Δ时，它在G_1中的度仍为Δ，而G_1中其它的顶点的度相对于它在G中的对应点的度要增加1。若G_1已是正则图，则取$G^*=G_1$；否则类似于由G构作G_1的方法，由G_1构作G_2，如此继续构作下去。显然$G_{\Delta-\delta}$即为所求之G^*；且若G是单图，这样得到的G^*也是单图。

(*b*) G是一个2–部图，由(*a*)知存在一个Δ–正则的2–部图G^*，G是G^*的子图。又由练习5.2.3(*a*)知G^*是可1–因子化的，即G^*可分解成Δ个完美匹配。在每个完美匹配上分别着以不同的颜色，显然它是G^*上的一个正常的Δ–边着色，当然它也是G上的一个正常的Δ–边着色。再由$\chi'(G)\geq\Delta(G)$，故$\chi'(G)=\Delta$，即定理6.1成立。

6.1.4 描述一个求2–部图G的正常的Δ–边着色的好算法。

解：设 G 是 2-部图，其中 $|X|\geqslant|Y|$。首先加点扩充 Y 为 Y^*，使得 $|X|=|Y^*|$，且仍记为 G。对 G 找 X 中的最小度点与 Y^* 中的最小度点连以边；直至各点的度全为 Δ 为止。这样得到一个 Δ-正则 2-部图 G^*（可能有多重边）。G^* 是有完美匹配的，可用匈牙利法求其完美匹配，且在算法过程中不会出现 $S\subset X$，$|N(S)|<|S|$ 的情况。设 M 是 G^* 的完美匹配，则 G^*-M 是 $(\Delta-1)$-正则 2-部图，仍可用匈牙利法求其完美匹配，直至求出 G^* 的 Δ 个边不重的完美匹配。每一个完美匹配着一种颜色。这一边着色法限制在 G 上即 G 的一个 Δ-边着色。

依据上述想法，可得相应的算法如下：

设2-部图 G 的二分划 (X, Y)，有 $|X|\geqslant|Y|$，在 Y 中增加一些孤立点成 Y^*，使 $|X|=|Y^*|$。

第 0 步：令 $G^*=G$ 是以 (X, Y^*) 为二部分划的 2-部图。

第 1 步：若 $\Delta(G^*)=\delta(G^*)$，则令 $k=1$，转第 3 步。否则转第 2 步。

第 2 步：取 $x^0\in X$，$y^0\in Y^*$ 使得：

$$d_{G^*}(x^0)=\min_{x_i\in X} d_{G^*}(x_i),\quad d_{G^*}(y^0)=\min_{y_j\in Y^*} d_{G^*}(y_j)$$

令 $G^*\leftarrow G^*+x^0y^0$，转第 1步。

第 3 步：任取 G^* 的一个匹配 M。

第 4 步：若 X 已 M-饱和，转第 7 步。否则，取 X 中一个 M-不饱和点 u，置 $S=\{u\}$，$T=\phi$。

第 5 步：在 $N(S)\setminus T$ 中取一点 y。

第 6 步：若 y 是 M-饱和的，有 z 使 $yz\in M$，用 $S\cup$

$\{x\}$代S，用$T\cup\{y\}$代T，转第5步。否则，∃一条(u,y)-路是M-增广路P，用$\hat{M}=M\Delta E(P)$代M，转第4步。

第7步：若$k=\Delta$，则停。否则，令$k\leftarrow k+1$，$G^*\leftarrow G^*-M$，转第3步。

这算法中，由G构造G^*的加边循环次数不超过$|X|\Delta$次，且匈牙利算法是多项式的，故此算法是好的。

6.1.5 利用练习1.5.8和定理6.1证明：若G是无环图，且$\Delta=3$，则$\chi'\leqslant 4$。

证：由练习1.5.8的结果知，G中包含了一个生成2-部子图H，且对任意$v\in V$满足$d_H(v)\geqslant\frac{1}{2}d_G(v)$。由于$\Delta(G)=3\geqslant\Delta(H)$，故由定理6.1知，对$H$存在正常的3-边着色。又由于$d_{G-E(H)}(v)=d_G(v)-d_H(v)\leqslant\frac{1}{2}d_G(v)\leqslant\frac{3}{2}$，故$d_{G-E(H)}(v)$为0，或1。所以对$G-E(H)$恒可以用第四色将它的边正常着色，把上述$H$的边着色和$G-E(H)$上的边着色合并起来就成为$G$上的一个正常的4-边着色，故$\chi'(G)\leqslant 4$。

6.1.6 证明：若G是2-部图，且$\delta(G)>0$，则G有一个δ-边着色，在G的任一个顶点上均有δ个颜色出现。

(R.P.Gupta)

证：若结论不成立，则对G存在一个最优的δ-边着色和一个顶点$v\in V$，满足$d_G(v)>C(v)$。显然v点满足引理6.1.2的条件，故由引理6.1.2知，在G中存在一个含有v的奇圈。这和G是2-部图不含奇圈相矛盾。

6.1.7 设x是连通图G的割点，而

$G-x=G'_1\cup G'_2$，$E(G'_1)\cap E(G'_2)=\phi$，G'_1、G'_2连通。

令

$$G_i = G[V(G'_i) \cup \{x\}] \qquad (i=1,\ 2)$$

其中 $E_i = \{ux \mid ux \in E(G),\ u \in V(G'_i)\}$，若 G_1、G_2均为k-边可着色的，且 $k \geqslant d_G(x)$，则 G 也为 k-边可着色的。

证：设$\mathscr{C}_1$、$\mathscr{C}_2$分别为G_1、G_2的 k-边正常着色法，$\mathscr{S}(x,\mathscr{C})$表示在着色法$\mathscr{C}$下$x$处出现的颜色集合，$\overline{\mathscr{S}}(x,\mathscr{C})$表示在边着色法$\mathscr{C}$下 x 处不出现的颜色集合。

(i) 若$\mathscr{S}(x,\mathscr{C}_1)\cap\mathscr{S}(x,\mathscr{C}_2)=\Phi$，结论显然。

(ii) 若$\mathscr{S}(x,\mathscr{C}_1)\cap\mathscr{S}(x,\mathscr{C}_2)=\mathscr{S}^*=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}\neq\Phi$．由于 $k\geqslant d_G(x)$，$d_{G_1}(x)+d_{G_2}(x)=d_G(x)$，可得

$$\begin{aligned}|\overline{\mathscr{S}}(x,\mathscr{C}_1)\cap\overline{\mathscr{S}}(x,\mathscr{C}_2)| &= |\overline{\mathscr{S}}(x,\mathscr{C}_1)|+|\overline{\mathscr{S}}(x,\mathscr{C}_2)| \\ &\quad -|\overline{\mathscr{S}}(x,\mathscr{C}_1)\cup\overline{\mathscr{S}}(x,\mathscr{C}_2)| \\ &= k-d_G(x)+|\mathscr{S}^*|\geqslant|\mathscr{S}^*|=n。\end{aligned}$$

所以存在 $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n\in\overline{\mathscr{S}}(x,\ \mathscr{C}_1)\cap\overline{\mathscr{S}}(x,\ \mathscr{C}_2)$．在$G_1$中，$\beta_i$ 色边改着 α_i 色，α_i 色边改着 β_i 色($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)，则得 G_1 的另一 k-边正常着色法$\mathscr{C}'_1$，且

$$\mathscr{S}(x,\ \mathscr{C}'_1)\cap\mathscr{S}(x,\ \mathscr{C}_2)=\Phi$$

由(i)知，G 为 k-边可着色的。

6.2 Vizing 定 理

定理6.2 (Vizing 定理) 若 G 是单图，则 $\chi'(G)=\Delta$或$\Delta+1$。

(对 ν 个顶点的单图 G 来说，若 $\chi'(G)=\Delta(G)$，则称 G 为**第Ⅰ类图**，且记 $G\in C'(\nu)$；若 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$，则

称 G 为第Ⅱ类图，且记 $G\in C^2(\nu)$。判定一个图属于何类问定，就是所谓边着色中的分类问题。它是一个未解决的问题，但 P.Erdös 和R.J.Wilson在《On The Chromatic index of almost all graphs》, J. Comb. Theory(B) 23. 255-257(1977)文中证明了如下结论：

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{|C^1(\nu)|}{|C^1(\nu)\cup C^2(\nu)|}=1.)$$

6.2.1 找一个边着色的方法，来证明 $\chi'(K_{2n-1})=\chi'(K_{2n})=2n-1$.

证：利用练习5.1.5(a)中证 K_{2n} 可1-因子化的方法，将它的 $2n-1$ 个完美匹配找出来，并对每一个完美匹配着以不同的颜色。按定义这种 $(2n-1)$-边着色是正常的，故 $\chi'(K_{2n})\leqslant 2n-1$。又因为有 $\chi'(K_{2n})\geqslant\Delta(K_{2n})=2n-1$。所以 $\chi'(K_{2n})=2n-1$。若把 K_{2n} 中如练习5.1.5(a)中所示的图的中心点以及和它关联之边除去，则我们得到一张 K_{2n-1} 的图。且从原来在 K_{2n} 中的正常的 $(2n-1)$-边着色得到 K_{2n-1} 中的一个正常的 $(2n-1)$-边着色。故 $\chi'(K_{2n-1})\leqslant 2n-1$。另一方面由于 K_{2n-1} 中共 $2n-1$ 个顶点，故它的任一个正常的边着色的每一色类中至多含有 $n-1$ 条边，而 K_{2n-1} 共有 $(2n-1)(n-1)$ 条边，从而 $\chi'(K_{2n-1})\geqslant 2n-1$。所以 $\chi'(K_{2n-1})=2n-1$。

6.2.2 证明：若 G 是非空正则单图，且 ν 为奇数，则 $\chi'(G)=\Delta+1$。

证：因为 $\nu=$ 奇数，故 G 的任一正常的边着色的每一色类最多是 $\frac{1}{2}(\nu-1)$ 条边，从而 $\frac{1}{2}\chi'(G)(\nu-1)\geqslant\varepsilon(G)$，又由于

G 是正则图，从而 $e(G)=\frac{1}{2}\Delta\,v$，故 $\chi'(G)>\Delta$。另一方面由 Vizing 定理知 $\chi'(G)\leqslant\Delta+1$，故 $\chi'(G)=\Delta+1$。

6.2.3[注](a) 证明：若 G 是无环单图，且 $v=2n+1$，$e>n\Delta$，则 $\chi'(G)=\Delta+1$。 (V.G.Vizing)

(b) 利用(a)证明：

(i) 若 G 是一个由顶点数为偶数的无环正则单图剖分一边后得到之图，则 $\chi'(G)=\Delta+1$；

(ii) 若 G 是一个由无环 k-正则的顶点为奇数个的单图中除去小于 $k/2$ 条边后得到之图，则 $\chi'(G)=\Delta+1$。

(L.W.Beineke 和 R.J.Wilson)

〔注〕 单图条件应该要求。若不加这条件，结论不一定成立。如(a)$v=3$ 的无环 4-正则图就是一个反例。类似地(b)中亦需加单图条件。否则结论也不一定成立。(b)的反例这儿从略。

证：(a)因为 $v=2n+1$，故对于 G 的任一个正常的边着色的每一个色类最多含 n 条边。故 Δ 色在 G 的正常的边着色中最多仅能着 $n\Delta$ 条边。由 $e>n\Delta$，故 $\chi'(G)>\Delta$。又由 Vizing 定理 $\chi'(G)\leqslant\Delta+1$，故 $\chi'(G)=\Delta+1$。

(b) (i)设 $v(G)=2n+1$，由假设 $e(G)=\frac{1}{2}\Delta(v(G)-1)+1>n\Delta$，故由(a)知 $\chi'(G)=\Delta+1$。

(ii) 设 $v(G)=2n+1$，若除去的边为 $k_1(<k/2)$条，则 $e(G)=vk/2-k_1>kn=\Delta n$。故由(a)知，$\chi'(G)=\Delta+1$。

(证明完全同于(a)可得：若 G 是无环单图，且 $v=2n$，$e>n\Delta$，则 $\chi'(G)=\Delta+1$。综合(a)与此可得命题：若 G 是无环单图，且 $e>[v/2]\Delta$，则 $\chi'(G)=\Delta+1$。)

6.2.4 (a)证明：若 G 是无环图，则存在一个 Δ-正则图 G^*，G 是 G^*的子图。

(b)利用(a)和练习 5.2.3(b)证明：假如 G 无环，Δ 是偶数，则 $\chi'(G)\leqslant 3\Delta/2$。(C.E.Shannon 1949 年证明上述不等式，当 Δ 为奇数时也成立。)

证：(a) 完全类似于 6.1.3(a)作图的方法，可求得这里的 G^*，且若 G 是单图时，G^*亦是单图。详细的叙述这里从略。

(b)利用(a)，存在一个 Δ-正则无环图 G_1，G 是 G_1的子图。对 G_1 由练习 5.2.3(b)知，它是可 2-因子化的，即它可以分解成 $\Delta/2$ 个 2-因子，而对每一个2-因子最多用 3 色就可正常的边着色。故对 G_1 可用 $3\Delta/2$ 种颜色正常的边着色，所以对 G_1 的子图 G 有 $\chi'(G)\leqslant 3\Delta/2$。

6.2.5 若图 G 中任意两个正常的 k-边着色对 $E(G)$均导出相同的分划，则称 G 是**唯一的 k-边着色的图**。证明每一个唯一的3-边着色的3-正则图是 Hamilton图。

(D.L.Greenwell 和 H.V.Kronk)

证：由于 G 是唯一的 3-边着色的 3-正则图，按定义有正常的3-边着色，从而 G 上每一顶点三种颜色各出现一次。每一色类恰是 G 的一匹配。取 G 中 1，2色的边所构成的子图 G_1，它是 G 的一个 2-因子。若 G_1 不连通，则 G_1 可分成 G_1'，G_1'' 两个互不相交的子图。对调 G_1' 中 1，2 色边的颜色，则构成和原来不相同的 $E(G)$的分划，这和 G 是唯一的3-边着色假定相矛盾。故 G_1 连通，所以 G_1 就是 G 的一条 Hamilton 圈。

6.2.6 单图 $G\times H$ 称为单图 G，H的**乘积**，其顶点集

合是 $V(G)\times V(H)$，(u, v)和(u', v')相邻的充要条件是：或者 $u=u'$，$vv'\in E(H)$，或者 $v=v'$，$uu'\in E(G)$。

(*a*) 利用 Vizing 定理 6.2，证明$\chi'(G\times K_2)=\Delta(G\times K_2)$。

(*b*) 若 H 是一个非平凡图，且$\chi'(H)=\Delta(H)$，则$\chi'(G\times H)=\Delta(G\times H)$。

证：(*a*)显然 $\Delta(G\times K_2)=\Delta(G)+1$，故$\chi'(G\times K_2)\geqslant\Delta(G\times K_2)=\Delta(G)+1$。下面由 Vizing 定理 6.2 知只需分两种情况来讨论。(1) 若$\chi'(G)=\Delta(G)$。则用$\chi'(G)$色对 $G\times\{1\}$，$G\times\{2\}$进行正常的边着色，且使这两图的对应边着以相同的颜色，而 $G\times\{1\}$和 $G\times\{2\}$间之边着以第$\chi'(G)+1$色。这种边着色方法对于 $G\times K_2$ 显然是正常的，故有$\chi'(G\times K_2)\leqslant\chi'(G)+1=\Delta(G)+1$。(2) 若$\chi'(G)=\Delta(G)+1$，则用$\chi'(G)$色对 $G\times\{1\}$，$G\times\{2\}$进行正常的边着色，且使这两图的对应边着以相同的颜色。而 $G\times\{1\}$和 $G\times\{2\}$间之边，由于在$\chi'(G)=\Delta(G)+1$ 色中，对 $G\times\{1\}$中任一顶点，至少有一种颜色未出现，我们就取这未出现的颜色来着和该点关联之未着色边。显然这种边着色方法对于 $G\times K_2$ 是正常的，故我们仍有 $\chi'(G\times K_2)\leqslant\Delta(G)+1$。综合(1)、(2)，有$\chi'(G\times K_2)\leqslant\Delta(G\times K_2)$。所以 $\chi'(G\times K_2)=\Delta(G\times K_2)$。

(*b*) 由定义 $\Delta(G\times H)=\Delta(G)+\Delta(H)$，故 $\chi'(G\times H)\geqslant\Delta(G)+\Delta(H)$。另一方面我们对 $G\times H$ 中 G 的每一个拷贝 $G\times\{v_i\}$，$v_i\in V(H)$，用 1，2，…，$\chi'(G)$色对它作正常边着色，且使每一拷贝对应于 G的同一边的边均着以同一色。我们还用 $\Delta(G)+1$，$\Delta(G)+2$，…，$\Delta(G)+$

$\Delta(H)$色对$G\times H$中的H的每个拷贝$\{u_i\}\times H$，$u_i\in V(G)$进行正常的边着色，由于$\chi'(H)=\Delta(H)$，从而这种边着色是可能的。于是下面由Vizing定理6.2知只需分两种情况来讨论：(1) 若$\chi'(G)=\Delta(G)$时，则上述的边着色是对$G\times H$的正常边着色，故此时有$\chi'(G\times H)\leqslant\Delta(G)+\Delta(H)$。(2)若$\chi'(G)=\Delta(G)+1$时，我们在上述边着色的基础上对$\{u_i\}\times H$中着$\Delta(G)+1$色的边，相应地换成1，2，…，$\Delta(G)+1$色中在$G$中的$u_i$点处不出现的那颜色，其余边着色均不变，最后所得之边着色，显然对$G\times H$是正常的，故此时仍然有$\chi(G\times H)\leqslant\Delta(G)+\Delta(H)$。综合(1)、(2)，我们有$\chi'(G\times H)\leqslant\Delta(G)+\Delta(H)$，所以$\chi'(G\times H)=\Delta(G)+\Delta(H)=\Delta(G\times H)$。

6.2.7 在一个单图G上寻找正常的$\Delta+1$-边着色的好算法。

解：由定理6.2知，对任意单图，存在正常的$\Delta+1$-边着色，且$\Delta+1$-边着色是正常的当且仅当它是最优的。从而我们作出寻找最优$\Delta+1$-边着色的好算法即可。

由引理6.1.2知，一个$\Delta+1$-边着色，若存在顶点u和颜色i及j，使i色在u不出现，而j色在u至少两次出现，且$G[E_i\cup E_j]$包含u的那个分支(记为$G_{ij}(u)$)不是一条奇圈，则它不是最优的。这时我们可用引理6.1.1中的证明方法得到这个$\Delta+1$-边着色的一个改进。改进的方法如下：

若$G_{ij}(u)$是Euler图，在$G_{ij}(u)$上使用Fleury算法，得$G_{ij}(u)$的一个Euler环游。

若$G_{ij}(u)$不是Euler图，则用增添一个新顶点并把它和$G_{ij}(u)$中每个奇度的顶点连以边的方法构造一个Euler图

$G^*_{ij}(u)$。在 $G^*_{ij}(u)$上使用 Fleury 算法，得$G^*_{ij}(u)$的一个 Euler 环游。

将上面得到的Euler环游，依各边在环游上的顺序关系交错地着 i 色和 j 色。$G_{ij}(u)$上的这样的边着色与 $G_{ij}(u)$外的原 $\Delta+1$-边着色一起构成了 G 上的一个改进的 $\Delta+1$-边着色。如果这种改进的着色仍不是最优的，又可重复上述过程，直至得到最优的 $\Delta+1$-边着色。

算法的具体步骤如下：

第 0 步：$d(v_k)\to d_k(k=1, \cdots, \nu)$；任给一个 $\Delta+1$-边着色$(E_1, E_2, \cdots, E_{\Delta+1})$。

第 1 步：$0\to c_k(k=1, \cdots, \nu)$；$0\to q$，$1\to s$。

第 2 步：令 $P=\Phi$。

第 3 步：若 $E_s\neq\Phi$，任取 $v_r v_t\in E_s$，$P\cup\{r, t\}\to P$，转第 4 步；否则，转第 5 步。

第 4 步：$E_s\setminus\{v_r v_t\}\to E_s$，转第 3 步。

第 5 步：$\forall k\in P$，令 $c_k+1\to c_k$。

第 6 步：若 $s<\Delta+1$，则 $s+1\to s$，转第 2 步；否则，转第 7 步。

第 7 步：若 $q<\nu$，则$q+1\to q$，转第 8 步；否则，停。

第 8 步：若 $c_q<d_q$，则令 $u=v_q$，$\exists i$，j 色，使在 u上 i 色不出现，j 色至少出现两次，找出 $G[E_i\cup E_j]$含 u的分支 $G_{ij}(u)$，转第 9 步；否则，转第 7 步。

第 9 步：若 $G_{ij}(u)$ 是 Euler 图，在 $G_{ij}(u)$ 上使用 Fleury 算法，求 $G_{ij}(u)$上的一个 Euler 环游。转第11步。

第 10 步：增添新顶点，构造 Euler 图 $G^*_{ij}(u)$，并在 $G^*_{ij}(u)$上使用 Fleury 算法，求 $G^*_{ij}(u)$上的一个 Euler 环

游。转第11步。

第11步：将Euler环游上的边依序排好，次序为奇数(偶数)且属于$G_{ij}(u)$的边集记为$E'_i(E'_j)$，令$(E_i \setminus E(G_{ij}(u)))\cup E'_i \to E_i$，$(E_j \setminus E(G_{ij}(u)))\cup E'_j \to E_j$，$\forall h \neq i, j$，$E_h \to E_h$，转第1步。

算法的第1步至第8步是判断$\Delta+1$-边着色是否为最优$\Delta+1$-边着色，这里主要是算各顶点出现的不同的颜色数$c_k(k=1,\cdots,v)$，其运算次数不超过$\left(3\binom{v}{2}+v\right)(\Delta+1)$。第8步中构作$G_{ij}(u)$的运算次数不超过$ev$，第9步至第11步是改进$\Delta+1$-边着色，其中主要是Fleury算法，已知它是好算法。且改进的循环次数不会超过$2e$。因而算法是好的。

6.2.8 证明：若G是$\delta>1$的单图，则对G存在一种$(\delta-1)$-边着色，使G的每一个顶点均出现$(\delta-1)$种颜色。

(R.P.Gupta)

证：用反证法，若G存在某个$(\delta-1)$-最优边着色$\mathscr{C}=(E_1, E_2, \cdots, E_{\delta-1})$，在$v_1$点处存在$i_0$色未出现，于是由$C(v_1)<\delta-1<\delta\leqslant d(v_1)$，在$v_1$点处存在$i_1$色重复出现，设由$v_1$经$i_1$色边所到达之顶点集合$V_2$中，若存在$v'_2\in V_2$，它被$i_1$色重复出现，将$\mathscr{C}$中$v_1v'_2$边改着$i_0$色。其余边着色不变，所得的新$(\delta-1)$-边着色记为$\mathscr{C}_1$。显然$C_1(v_1)=C(v_1)+1$，$C_1(v'_2)\geqslant C(v'_2)$，其余顶点的$C(v)$不变，于是$\sum\limits_{v\in V}C_1(v)>\sum\limits_{v\in V}C(v)$。这和$\mathscr{C}$是最优的相矛盾。故$V_2$中任一顶点对$i_1$色均只出现一次。任取$v_2\in V_2$，因为$d(v_2)\geqslant\delta>\delta-1$，所以在$v_2$点必有$i_2$色重复出现。一般情况，可得到如下性属的点列$v_1$、$v_2$、$\cdots$、$v_k$，对$j=1, 2, \cdots, k-1$，

v_jv_{j+1}边着i_j色，且i_j色在v_j点处重复出现，而在v_{j+1}点处出现一次。考察v_k，因为$d(v_k)\geqslant\delta>\delta-1$，故在$v_k$点处存在$i_k$色重复出现。设由$v_k$经$i_k$色边所到达之顶点集合$V_{k+1}$中，若存在$v_{k+1}'\in V_{k+1}$，它被$i_k$色重复出现，现将$\mathscr{C}$中$v_jv_{j+1}$边改着$i_{j-1}$色，$v_kv_{k+1}'$边改着$i_{k-1}$色，其余边着色不变，最后所得的新的$(\delta-1)$-边着色记为$\mathscr{C}_k$，显然$C_k(v_1)=C(v_1)+1,C_k(v_j)\geqslant C(v_j)(j=2,\cdots,k),C_k(v_{k+1}')\geqslant C(v_{k+1}')$，其余顶点$C(v)$不变，于是$\sum\limits_{v\in V}C_k(v)>\sum\limits_{v\in V}C(v)$，这仍和$\mathscr{C}$是最优的相矛盾，故$V_{k+1}$中任一顶点，$i_k$均出现一次。从而具有上述性质的点列和色列均可以无限制地延续下去，但因为仅有$\delta-1$个颜色，因而在色列$i_1,i_2,\cdots,i_h,i_{h+1},\cdots,i_l,\cdots$，中必存在最小的正整数偶$h$、$l$，$h<l$，使$i_h=i_l$，对应的点列为$v_1,v_2,\cdots,v_h,v_{h+1},\cdots,v_l,\cdots$，其中$v_jv_{j+1}$边着$i_j$色，且在$v_j$点处$i_j$色重复出现，在$v_{j+1}$点处$i_j$色只出现一次。现在$\mathscr{C}$的基础上，重新着色如下：$v_jv_{j+1}$边改着$i_{j-1}$色$(j=1,2,\cdots,h)$，其它边着色不变。此时$v_1$点处多了一个$i_0$色，而$v_{h+1}$点处少出现一了个$i_h$色，因而新着色仍是一个$(\delta-1)$-最优边着色记为$\mathscr{C}'$。对$\mathscr{C}'$而言，在$v_{h+1}$点处，缺$i_h$色，但$i_{h+1}$色重复出现。由引理6.1.2 $G[E'_{i_h}\cup E'_{i_{h+1}}]$中含$v_{h+1}$点的分支是一个奇圈，且此奇圈恒包含$v_{h+2}$点。在此奇圈上保持$v_{h+1}v_{h+2}$边着色不变，对其它的边$i_h$和$i_{h+1}$互换，所得的新着色记为$\mathscr{C}''$，对$\mathscr{C}''$，在$v_{h+1}$处增加一个$i_h$色，而在$v_{h+2}$点处少了一个$i_h$色，否则就和$\mathscr{C}$是最优的相矛盾。因而$\mathscr{C}''$仍为$(\delta-1)$-最优边着色。对$\mathscr{C}''$而言，由引理6.1.2，$G[E''_{i_h}\cup E''_{i_{h+2}}]$中含$v_{h+2}$点的分支

为一奇圈，又在此奇圈上，保持$v_{h+2}v_{h+3}$边的着色不变，仍为i_{h+2}色，其余之边交换i_h、i_{h+2}色，所得的新的边着色类似上述证明仍是最优的，且在v_{h+2}点处增加了i_h色，而在v_{h+3}点处少了一个i_h色．依次类推，可一直作下去，且每次所得的新着色法均保持最优性不变，直到使v_{l-1}点处失去i_h色时，把边$v_{l-1}v_l$重新着i_h色，所得的新的边着色，在v_{l-1}点处增加了i_h色，在v_l点处少了一个i_{l-1}色，从而它仍然是最优的。但在v_l处，$i_h=i_l$色出现最少有三次。从而G中i_h色边和i_{l-1}色边的导出子图中含v_l的分支不可能是奇圈，这和引理6.1.2矛盾，因而得证。

（在李修睦著的《图论导引》中有较多的边着色结果，特别是有

定理12.6 若$G'=G-\overline{ab}$为k-边可着色的，$k\geqslant d_G(a)$，$k\geqslant d_G(b)$，且对$\forall x\in N_{G'}(a)$有

$$d_G'(x)+m_{G'}(x,a)\leqslant\begin{cases}k & x\neq b\\ k-1 & x=b\end{cases}$$

则G也为k-边可着色。其中$\overline{ab}\in E(G)$，$N_{G'}(a)$表在G'中与a相邻的点集，$m_{G'}(x,a)$表x、a间的边数。

利用此定理可推得多重图的Vizing定理，以及许多重要结果。）

6.2.9 设单图G，$F=\{u\,|\,d(u)=\Delta\}$，若$G[F]$是森林，则$G\in C^1$。

证： 对ε用数学归纳法。

$\varepsilon=0$，1时结论显然成立．设$\varepsilon=m$时结论成立，现推

$\varepsilon=m+1$ 时结论也成立。

由于 G 满足题中条件时，必有 $u\in V(G[F])$，使 $d_{G[F]}(u)\leqslant 1$。考虑 $G'=G-uv$，其中若 $d_{G[F]}(u)=0$，取 $uv\in E(G)$；若 $d_{G[F]}(u)=1$，取 $uv\in E(G[F])$。

若 $\Delta(G')\leqslant\Delta(G)-1$，则 G' 为 $\Delta(G)$-边可着色，由上面括号中的定理 12.6 知，G 也为 $\Delta(G)$-边可着色，从而 $G\in C^1$；

若 $\Delta(G')=\Delta(G)$，显然 G' 满足题中的条件，且 $\varepsilon(G')=m$，所以由归纳假设 G' 为 $\Delta(G)$-边可着色。再由定理12.6知 G 也为 $\Delta(G)$-边可着色，从而 $G\in C^1$。

综合上面论证得 $G\in C^1$。

(关于边着色的进一步知识，可参阅 S. Fiorini and R. J. Wilson《Edge-colouring of graphs》1978.)

6.3 时间表问题

定理6.3 若 G 是2-部图，且 $p\geqslant\Delta$，则 G 中存在 p 个不相交的匹配 $M_1, M_2, \cdots, M_p$ 使得 $E=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_p$，且对 $1\leqslant i\leqslant p$ 均有 $[\varepsilon/p]\leqslant|M_i|\leqslant\{\varepsilon/p\}$。

系：若有 ε 种课程被安排在 p 节课的时间表内，则一节课平均讲 ε/p 种课程，且至少需要 $\{\varepsilon/p\}$ 个教室。

6.3.1 在一个学校中，有 7 个教师和 12 个班。在每周进行 5 天教学的条件下，教课的要求由下列矩阵给出

$$
\begin{array}{c} \\ P= \end{array}
\begin{array}{cccccccccccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 & Y_7 & Y_8 & Y_9 & Y_{10} & Y_{11} & Y_{12} \end{array}
$$

$$
P=\begin{pmatrix}
3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\
5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\
2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\
3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\
5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\
0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array}
$$

其中 p_{ij} 是教师 X_i 必须教 Y_j 班的节数。试问：

(*a*) 一天分成几节课，才能满足所提的要求？

(*b*) 若安排出每天 8 节课的时间表，需要多少间教室？

解： 设由矩阵P对应的2-部图为 G，我们有：$d(X_1)=d(X_3)=d(X_4)=d(X_6)=35$；$d(X_2)=32$；$d(X_5)=d(X_7)=34$；$|V(G)|=19$；$|E(G)|=240$。

(*a*) $\Delta=35$，由定理 6.1，G 有 35个不相交的匹配。所以，一天分成7($7=35/5$)节课就可以完成教学任务。

(*b*) 由定理 6.3 的系有 $240/(5\times8)=6$，知在每天 8 节的时间表下，需要 6 间教室。

第七章　独立集和团

7.1 独　立　集

定义：$V(G)$的子集S称为G的**独立集**，当且仅当S中的任意两点均不相邻；若G中不存在独立集S'，使$|S'|>|S|$，则称S是G中的**最大独立集**。$S(\subseteq V)$称G的**覆盖集**当且仅当G中的任一边至少有一端点在S中。若G中不存在覆盖集S'，使得$|S'|<|S|$，则称S为**最小覆盖集**。类似可定义**边独立集**(匹配)和**边覆盖集**，这里从略。

定义：G的最大独立集的顶点数称为**独立数**，记为$\alpha(G)$；G的最大边独立集的边数称为**边独立数**，记为$\alpha'(G)$；G的最小覆盖的顶点数称为**覆盖数**，记为$\beta(G)$；G的最小边覆盖的边数称为**边覆盖数**，记为$\beta'(G)$。

定理7.1　$S\subseteq V$是G的独立集的充要条件是$V\setminus S$是G的覆盖。

系7.1　$\alpha+\beta=\nu$。

定理7.2(T.Gallai)　若$\delta>0$，则$\alpha'+\beta'=\nu$。

定理7.3　2-部图G，若$\delta>0$，则$\alpha=\beta'$。

7.1.1　(a) 证明，G是2-部图的充要条件是对G中任意子图H，成立$\alpha(H)\geqslant\frac{1}{2}\nu(H)$。

(*b*) 证明：G 是2-部图的充要条件是对G的任意子图H，$\delta(H)>0$，成立 $\alpha(H)=\beta'(H)$。

证：(*a*)⇒：由于G是2-部图，从而它的子图H亦是2-部图，显然2-部图顶点分划(X, Y)中的X，Y均是2-部图的独立集，故 $\alpha(H) \geqslant \max\{|X(H)|, |Y(H)|\} \geqslant \nu(H)/2$。

⇐：用反证法。若G不是2-部图，则G含有奇圈H。H是G的子图，但 $\alpha(H)=\frac{1}{2}(\nu(H)-1)<\frac{1}{2}\nu(H)$，这和假设矛盾。故$G$是2-部图。

(*b*)⇒：由于H仍为2-部图，且$\delta(H)>0$，则由定理7.3，$\alpha(H)=\beta'(H)$。

⇐：用反证法，若G含奇圈H，对G的子图H，我们有$\alpha(H)<\beta'(H)$，这和假设矛盾。所以G是2-部图。

7.1.2 一个图G是**α-临界的**，是指任意的$e\in E(G)$，均有$\alpha(G-e)>\alpha(G)$成立。

证明：连通的α-临界图无割点。

证：因α-临界图是无环的，故我们只要证明连通的有割点的无环图是非α-临界的即可！

设G是连通的有割点w的无环图，由割点定义可分$E(G)$为E_1、E_2使得$G_1=G[E_1]$，$G_2=G[E_2]$，以w为唯一的公共交点。设$E_k^w(k=1, 2)$是G_k中与w关联的边集。由于G连通，E_k^w非空。下面分两种情况给以证明：

(1) G的一切最大独立集S均不含w时，若有$e_1=wu\in E_k^w$使得$\alpha(G-e_1)>\alpha(G)$，且设S'是$G-e_1$的一个最大独立集，当然$|S'|=\alpha(G-e_1)>\alpha(G)$。则$S'$必含$w$和$u$；否则，$S'$不含$w$或$u$，$S'$是$G$的独立集，但$|S'|>\alpha(G)$，矛盾！于是，

$S''=S'\setminus\{u\}$是G的独立集，且 $|S''|=|S'\setminus\{u\}|\geqslant\alpha(G)$，从而 S''是G的含 w 的最大独立集，与条件矛盾！故对一切 $e_1\in E_1^w$ 均有 $\alpha(G-e_1)=\alpha(G)$，G 非α-临界。

(2) G 有最大独立集S，使$w\in S$时，令$S_1=S\cap V(G_1)$，$S_2=S\cap V(G_2)$。

显然，S_k 是 G_k 的最大独立集，否则，与 S 是G的最大独立集矛盾！又 $\alpha(G)=|S|=|S_1|+|S_2|-1$。这时，若有 $e_1\in E_1^w$，$e_2\in E_2^w$，使得 $\alpha(G_1-e_1)>\alpha(G_1)$，$\alpha(G_2-e_2)>\alpha(G_2)$，设 S'_k 是 G_k-e_k 的最大独立集。当然 $|S'_k|-1=\alpha(G_k-e_k)-1\geqslant\alpha(G_k)$，令$S'=(S'_1\cup S'_2)\setminus\{w\}$，则 S' 是 G 的独立集，且

$$|S'|\geqslant|S'_1|+|S'_2|-2\geqslant\alpha(G_1)+\alpha(G_2)$$

$e=|S_1|+|S_2|>|S_1|+|S_2|-1=\alpha(G)$，矛盾！所以，要么 $\forall e_1\in E_1^w$ 有$\alpha(G_1-e_1)=\alpha(G_1)$，要么 $\forall e_2\in E_2^w$有$\alpha(G_2-e_2)=\alpha(G_2)$。不妨设后者成立，则 S_2 是 G_2-e_2 的最大独立集。于是，$S=S_1\cup S_2$是$G-e_2$ 的最大独立集，$\alpha(G-e_2)=|S|=\alpha(G)$，故 G非α-临界。

另证：由系 7.1知，G 是α-临界图必然也是 β临界图，于是利用练习 7.1.3(a) 本命题成立。

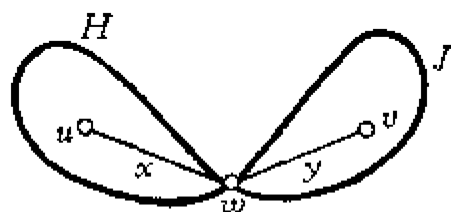
7.1.3 若对任意的 $e\in E(G)$均有 $\beta(G-e)<\beta(G)$则称 G 为**β-临界图**。证明：

(a) 连通β-临界图无割点；

(b) 若 G连通，则 $\beta\leqslant\frac{1}{2}(e+1)$。

证：(a) 若G 存在割点 $w\in V(G)$，如图所示，J、H是以w 相连的G 的两部分，令M是 $G-x-y$ 的最小覆盖，则

$M\cup\{w\}$ 是G的覆盖，故 $\beta(G-x-y)+1\geqslant\beta(G)>\beta(G-x-y)$，所以$\beta(G)=\beta(G-x-y)+1$，同理由 $\beta(G)>\beta(G-x)$，$\beta(G-y)\geqslant\beta(G-x-y)$，于是有 $\beta(G-x)=\beta(G-x-y)=\beta(G-y)$。对于 $G-x$和$G-y$ 的最小覆盖分别记为M_x，



7.1.3 图

M_y。今若存在 $N\subset V(J)$是J的覆盖，且$|N|<|M_x\cap V(J)|$，由于 $W=N\cup[M_x\cap V(H)]\cup\{w\}$ 是 G 的覆盖，于是 $\beta(G)\leqslant|W|\leqslant|N|+1+|M_x\cap V(H)|\leqslant|M_x\cap V(J)|+|M_x\cap V(H)|=|M_x|=\beta(G-x)$，这和 G是β-临界相矛盾。从而知 $|N|\geqslant|M_x\cap V(J)|$，即$M_x\cap V(J)$ 是J 的最小覆盖。又 $(M_y\cap V(J))\cup\{w\}$也是 J的覆盖，从而有 $|M_x\cap V(J)|\leqslant|M_y\cap(J)|+1$。令 $R=(M_x\cap V(J))\cup(M_y\cap V(H))$，显然 R是G 的覆盖，从而有 $\beta(G)\leqslant|M_x\cap V(J)|+|M_y\cap V(H)|\leqslant|M_y\cap V(J)|+1+|M_y\cap V(H)|=|M_y|+1=\beta(G-y)+1$，所以有 $|M_x\cap V(J)|=|M_y\cap V(J)|+1$。下面令 $R'=(M_y\cap V(J))\cup(M_x\cap V(H))$，它是$G-x-y$ 的一个覆盖，故有 $\beta(G-x-y)\leqslant|M_y\cap V(J)|+|M_x\cap V(H)|<|M_x\cap V(J)|+|M_x\cap V(H)|=|M_x|=\beta(G-x)$，这与 $\beta(G-x-y)=\beta(G-x)$ 矛盾，故 G不存在割点。

另证：由系 7.1 知，G 是β-临界当且仅当 G是α-临界，再由练习 7.1.2 知，G 无割点。

(b) 用归纳法证明。$e=1$ 时，结论显然成立。设 $e<k$时，结论均成立。现设 $e(G)=k$，考虑G中的最长路 μ_n 记为 $v_1v_2\cdots v_n$。令$G_2=G-v_2$，若G_2连通，由于 $e(G_2)\leqslant k-2=e$

$(G)-2$，故由归纳法假设$\beta(G_2)\leqslant\frac{1}{2}(\varepsilon(G_2)+1)$；又由定义有$\beta(G)\leqslant\beta(G_2)\leqslant+1\leqslant\frac{1}{2}(\varepsilon(G_2)+3)\leqslant\frac{1}{2}(\varepsilon(G)+1)$。若$G_2$不连通，设$G_2$含有两个非平凡分支$G_2(1)$，$G_2(n)$，且不失一般性可假定$v_n\in G_2(n)$，$v_0v_1\in E(G_2(1))$，于是$G$中存在路$v_0v_1v_2\cdots v_n$，它比$\mu_n$更长，矛盾，故$G_2$中至多仅能含有一个非平凡分支$G_2(n)$。显然有$\varepsilon(G_2(n))\leqslant k-2=\varepsilon(G)-2$，由归纳法假设$\beta(G_2(n))\leqslant\frac{1}{2}(\varepsilon(G_2(n)+1)$，又$G_2(n)$中的点覆盖再加上$v_2$，就构成$G$中的点覆盖，故$\beta(G)\leqslant\beta(G_2(n))+1\leqslant\frac{1}{2}(\varepsilon(G_2(n))+3)\leqslant\frac{1}{2}(\varepsilon(G)+1)$，所以，不论$G_2$连通与否，结论均成立。

7.2 Ramsey定理

定义：$V(G)$中的子集S，若$G[S]$是完全图，则称S是单图G的**团**。

显然S是G的团的充要条件是S是G^c的独立集。

定义：对任给的正整数对k，l，称满足如下性质的最小正整数n（记为$r(k, l)$）为**Ramsey数**，若任意的n个顶点的单图G中或含K_k子图(即k团)或含l个顶点的独立集。

Ramsey数的存在性1930年F.P.Ramsey给予了证明。为了推广Ramsey数的定义，它还可等价地定义如下："对任给的正整数对k，l，记$r(k, l)$是满足如下性质的最小正整数n，对K_n的任一2-边着色的边分划(E_1, E_2)中，或$K_n[E_1]$含有K_k子图，或$K_n[E_2]$含K_l子图。"按这种定义甚易推广Ramsey数为广义Ramsey数：

定义：对任意的正整数列k_1，k_2，…，k_m，称满足如下性质的最小正整数n记为$r(k_1, k_2, \cdots, k_m)$为**广义的Ramsey数**，若对K_n的任意m边着色的边分划$(E_1, E_2, \cdots, E_m)$中，恒存在某个$i(1\leqslant i\leqslant m)$，$K_n[E_i]$中包含$K_{k_i}$子图。

定理7.4 对任意的整数对$k\geqslant 2$，$l\geqslant 2$，总成立$r(k, l)\leqslant r(k-1, l)+r(k, l-1)$。

定理7.5 $r(k,l)\leqslant \binom{k+l-2}{k-1}$。

定理7.6(P.Erdös) $r(k, k)\geqslant 2^{k/2}$。

定理7.7 $r(k_1,k_2,\cdots,k_m)\leqslant r(k_1-1, k_2,\cdots, k_m)+\cdots+r(k_1, k_2, \cdots, k_m-1)-m+2$。

系7.7 $r(k_1+1, k_2+1, \cdots, k_m+1)\leqslant\frac{(k_1+\cdots+k_m)}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$

定义：$r(k, l)-1$个顶点的单图G，若它既不含K_k子图，又不含l个顶点的独立集，称G为**(k, l)-Ramsey图**。

7.2.1 证明：对一切的k,l，成立$r(k, l)=r(l, k)$。

证：由于若G含有K_k子图，则G^c含有k个顶点的独立集；若G含有l个顶点的独立集，则G^c含有K_l子图。故由Ramsey数定义，成立$r(k, l)=r(l, k)$。

7.2.2 证明定理7.7和系7.7。

证：定理7.7的证明：令$n=r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)+r(k_1, k_2-1,\cdots, k_m)+\cdots+r(k_1,k_2,\cdots,k_m-1)-m+2$，任取一个$K_n$的$m$-边着色，其色类的边分划为$(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，在$K_n$中任取一顶点$v\in V(K_n)$，设与$v$关联的边中着以$i$色的边数

记为r_i，显然有$r_1+r_2+\cdots+r_m=d_{K_n}(v)=n-1=[r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)-1]+\cdots+[r(k_1,k_2\cdots,k_m-1)-1]+1$，故恒存在某个$j(1\leqslant j\leqslant m)$，满足$r_j\geqslant r(k_1,\cdots,k_{j-1},k_j-1,k_{j+1},\cdots,k_m)$。考虑$K_n$中的子图$K_{r_j}$，它的顶点在$K_n$中和$v$关联的边均为$j$色，且$K_{r_j}$上的$m$-边着色保持了它作为$K_n$子图的$m$-边着色。由$r(k_1,\cdots,k_{j-1},k_j-1,k_{j+1},\cdots,k_m)$的定义，当$i\neq j$时，若在$K_{r_j}$中存在着以$i$色的$K_{k_i}$子图，则这$K_{k_i}$也是在上述$K_n$的$m$-边着色中着以$i$色的$K_{k_i}$子图。反之则在$K_{r_j}$中存在着以$j$色的$K_{k_j-1}$的子图。于是$K_{k_j-1}\vee\{v\}=K_{k_j}$是上述$K_n$的$m$-边着色中着以$j$色的子图。综合上述，由广义的Ramsey数定义知，定理7.7成立。

系7.7的证明：用归纳法对$k=k_1+k_2+\cdots+k_m$，加以证明。易知$r(1,1,\cdots,1)=1\leqslant\frac{0!}{0!\cdots0!}$。今设$k'=k_1'+k_2'+\cdots+k_m'<k_1+k_2+\cdots+k_m=k$，且$k_i'\leqslant k_i(i=1,2,\cdots,m)$时，$r(k_1'+1,k_2'+1,\cdots,k_m'+1)\leqslant\frac{(k_1'+k_2'+\cdots+k_m')!}{k_1'!\,k_2'!\cdots k_m'!}$成立。于是$r(k_1+1,k_2+1,\cdots,k_m+1)\leqslant r(k_1,k_2+1,\cdots,k_m+1)+r(k_1+1,k_2,k_3+1,\cdots,k_m+1)+\cdots+r(k_1+1,\cdots,k_{m-1}+1,k_m)\leqslant\frac{(k_1+\cdots+k_m-1)!}{(k_1-1)!\,k_2!\cdots k_m!}+\cdots$

$$+\frac{(k_1+\cdots+k_m-1)!}{k_1!\cdots k_{m-1}!\,(k_m-1)!}$$

$$=\frac{(k_1+\cdots+k_m)!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!}$$

7.2.3　令r_n表示所有k_i均为3的Ramsey数$r(k_1,k_2,\cdots,k_n)$。

(a) 证明：$r_n\leqslant n(r_{n-1}-1)+2$；

(*b*) 注意到 $r_2=6$，利用(*a*)，证明：$r_n\leqslant[n!\,e]+1$。

(*c*) 推导$r_3\leqslant 17$。(R.E. Greenwood 和A.M. Gleason，1955证明了 $r_3=17$。)

证：(*a*) 对$K_{r_{n-1}}$进行n-边着色，其色类边分划为$(E_1, E_2, \cdots, E_n)$。若1色出现，则显然E_1的导出子图中含有K_2；若1色不出现，则此时是$(n-1)$-边着色，按r_{n-1}的定义，存在某个$i(2\leqslant i\leqslant n)$对应的$E_i$的导出子图中含有$K_3$的子图，故$r(2, 3, \cdots, 3)\leqslant r_{n-1}$。类似地有$r(3, \cdots, 3, 2, 3, \cdots, 3)\leqslant r_{n-1}$。再由定理7.7有：$r_n\leqslant r(2, 3, \cdots, 3)+r(3, 2, 3, \cdots, 3)+\cdots+r(3, \cdots, 3, 2)-n+2\leqslant nr_{n-1}-n+2=n(r_{n-1}-1)+2$。

(*b*) 由于$r_2=6$，直接验证$r_2\leqslant[2!\,e]+1=6$，故命题当$n=2$时成立。用归纳法，假如$r_n\leqslant[n!\,e]+1$成立。由于(*a*)，$r_{n+1}\leqslant(n+1)(r_n-1)+2\leqslant(n+1)[n!\,e]+2=(n+1)\left[n!\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n\cdot n!}\right)\right]+2\overset{|\theta|<1}{=}(n+1)!\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)+2$；另一方面，$\left[(n+1)!e\right]=\left[(n+1)!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta'}{(n+1)(n+1)!}\right)\right]\overset{|\theta'|<1}{=}(n+1)!\cdot\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right)=(n+1)!\times\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)+1$。故$r_{n+1}\leqslant\left[(n+1)!\,e\right]+1$。

(*c*) 由(*b*)，$r_3\leqslant[3!\,e]+1=17$。

7.2.4 单图G和H的**合成**是一个单图，记为$G[H]$，其

顶点集为 $V(G)\times V(H)$，(u, v)和(u', v')相邻的充要条件是$uu'\in E(G)$ 或 $u=u'$，$vv'\in E(H)$。

(a) 证明 $\alpha(G[H])\leqslant\alpha(G)\alpha(H)$；

(b) 利用(a)证明

$$r(kl+1, kl+1)-1\geqslant(r(k+1, k+1)-1)\times(r(l+1, l+1)-1);$$

(c) 推导 $r(2^n+1, 2^n+1)\geqslant5^n+1$，，对一切的 $n\geqslant0$ 均成立。 (H.L.Abbott)

(d) 推导 $r(k^n+1, k^n+1)\geqslant m^n+1$，对一切的 $n\geqslant0$ 均成立，其中 $r(k+1, k+1)=m+1$。

证：(a)设I_G，I_H 分别记为G 和H的某一最大独立集。G 之拷贝 $G(v_0)$为由$\{(u, v_0)|u\in V(G)$，$v_0\in V(H)$ 中某一固定顶点$\}$ 在$G[H]$中的诱导子图。若 $v_1v_2\in E(H)$，则由合成定义，$G(v_2)$中任一顶点至少和$\{(u, v_1)|u\in I_G\}$中某个顶点相邻，故有 $\alpha(G[v_1v_2])=\alpha(G)$。于是 $G[H]$中任一顶点或属于$\{(u, v)|u\in I_G, v\in I_H\}$，或与其中某一顶点相邻，从而有 $\alpha(G[H])\leqslant\alpha(G)\alpha(H)$。进一步注意到，若 u，u'；v,v' 分别在G 和H中不相邻，则由定义知(u,v)、(u,v')、(u', v)、(u',v') 在 $G[H]$中亦独立，于是$\{(u,v)|u\in I_G, v\in I_H\}$是$G[H]$中的独立集，从而有$\alpha(G[H])\geqslant\alpha(G)\alpha(H)$。所以 $\alpha(G[H])=\alpha(G)\alpha(H)$。

(注：这里我们得到的结论比(a)更强。)

(b)取 G为$(k+1, k+1)$-Ramsey 图，由定义知：$\alpha(G)\leqslant k$，$\alpha(G^c)\leqslant k$；同理取H为$(l+1, l+1)$-Ramsey图，有$\alpha(H)\leqslant l$，$\alpha(H^c)\leqslant l$。由(a)知，$\alpha(G[H])\leqslant\alpha(G)\alpha(H)\leqslant kl$，故$G[H]$中不含$kl+1$个顶点的独立集。另一方面由$G$ 中

的K_r子图及$vv'\in E(H)$知，$K_r[vv']$是$G[H]$中的K_{2r}子图；若H_1为v,v'两点构成的空图，由合成的定义，(u,v)，(u,v')之间在$K_r[H_1]$中没有边相连，故$K_r[H_1]$中的极大完全子图仍为K_r。利用上面这二结果易知，若$K_{k_1}(G)$，$K_{l_1}(H)$，$(k_1\leqslant k,\ l_1\leqslant l)$，分别是$G$，$H$中的极大完全图，则$K_{k_1}(G)[K_{l_1}(H)]=K_{k_1 l_1}$是$G[H]$中的极大完全图，故$G[H]$中不存在$K_{kl+1}$完全子图。于是按Ramsey数的定义有：$r(kl+1,\ kl+1)-1\geqslant v(G[H])=(r(k+1,\ k+1)-1)(r(j+1,\ l+1)-1)$。

(c) 由(b)及$r(3,\ 3)=6$，于是$r(2^n+1,\ 2^n+1)-1\geqslant(r(2+1,\ 2+1)-1)$。

$(r(2^{n-1}+1,\ 2^{n-1}+1)-1)=5(r(2^{n-1}+1,\ 2^{n-1}+1)-1)$，由归纳法知，$r(2^n+1,\ 2^n+1)-1\geqslant 5^n$，所以结论成立。

(b) 证明与(c)相同，从略。

7.2.5 证明：3-圈C_3和5-圈C_5的联$C_3\vee C_5$不包含K_6子图，但是它的任一个2-边着色均产生单色三角形。

(J.Folkman 1970年构造出一个顶点数非常大的图，它不包含K_4子图，但它的任一2-边着色均产生单色三角形。

证：先证$C_3\vee C_5$中不含K_6，由于$K_6=K_3\vee K_3$，而C_5中不含K_3，从而推知$C_3\vee C_5$不含K_6。虽然如此，但$C_3\vee C_5$的任一个2-边着色含单色三角形。证明如下：

设$C_3=xyzx$，$C_5=abcdea$。不妨设x，y，z中存在一点，比如x，使xy，xz是不同色的（否则，C_3是单色三角形）。考虑x与C_5各点的连边，其中至少有三条边是同色的，不妨设xa，xb与xy同色，考察边ya，yb及ab的

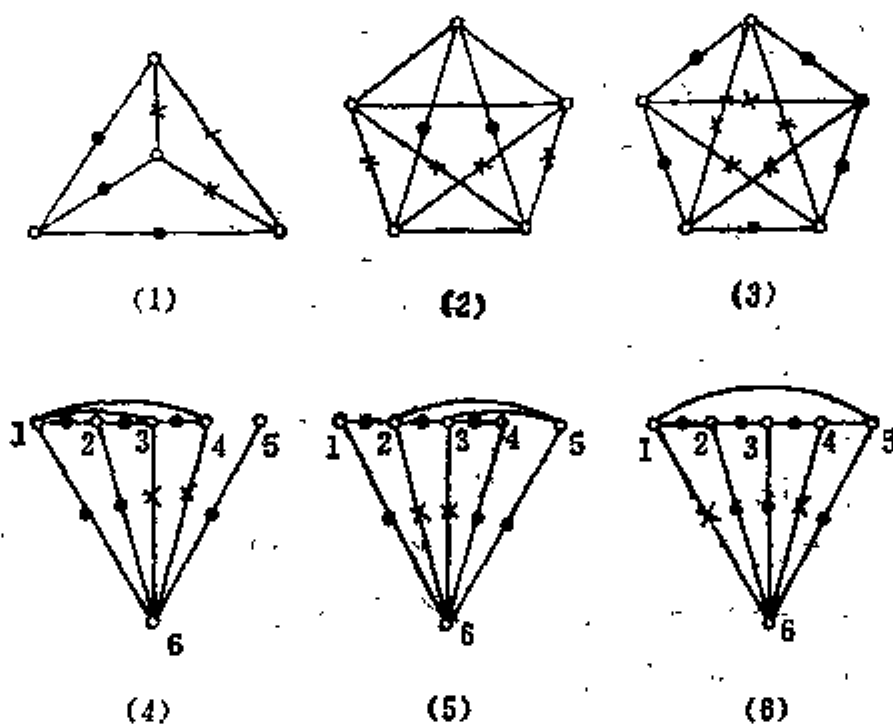
着色，易见要么 $abya$ 是单色三角形，要么 $xabx$（或 $xbyx$ 或 $xayx$）是单色三角形。

7.2.6 设 G_1, G_2, …, G_m 是单图，称满足如下性质的最小正整数 n，记为 $r(G_1, G_2, \cdots, G_m)$，为**广义的 Ramsey 数**，若对 K_n 的任意 m-边着色的边分划 $(E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 中，恒存在某个 i, $(1 \leqslant i \leqslant m)$，$K_n[E_i]$ 中包含同构于 G_i 的子图。

(a) 若 G 是长为 3 的路，H 是 4-圈，则 $r(G, G)=5$, $r(G, H)=5$, $r(H, H)=6$;

(b) 若 T 是 m 个顶点的树，且 $m-1$ 整除 $n-1$，则 $r(T, K_{1,n})=m+n-1$;

(c) 若 T 是 m 个顶点的树，则 $r(T, K_n)=(m-1)(n-1)+1$。 (V. Chvátal)



7.2.6 图

证：(a)我们在图中分别以带点的边和带×的边代表着以1和2色的边，由图(1)知，$r(G, G)\geqslant 5$，$r(G, H)\geqslant 5$。

类似习题7.2.1的证明，对任意G_1，G_2图，有$r(G_1, G_2)=r(G_2, G_1)$，故对K_5进行2-边着色时，不失一般性，存在某一顶点至少有两条关联边着以1色，若不存在着1色的G图，则如图(2)中的带×边必须着以2色，但这样一来，又产生了着2色的G和H图。故按定义$r(G, G)\leqslant 5$，$r(G,H)\leqslant 5$。所以有$r(G, G)=5$，$r(G, H)=5$。

由图(3)知$r(H, H)\geqslant 6$。另一方面由$r(H, H)$的对称性，不失一般性，假设在K_6的2-边着色中，顶点"6"至少有3条边着1色。若在$K_6-\{6\}$中，对上述2-边着色，存在着2色的H子图，则这H子图也是上述2-边着色下K_6中的着2色在H子图；反之，若在$K_6-\{6\}$中不存在着2-色的H子图，于是由$r(G, H)=5$知，在$K_6-\{6\}$中一定存在着1色的G子图，此时在K_6中我们排除明显地存在着1色的H子图外，剩下来有下面三种情况需进一步讨论，如图(4)，(5)，(6)。假定不存在着1色的H子图，于是对于图(4)，13必须着2色，否则1623成为着1色的H图。14也必须着2色，否则1234成为着1色的H图。但这样一来1364成为着2色的H图。对于图(5)中的25，35边；图(6)中的15，45边，类似讨论均需着以2色，但这样一来，图(5)中的2635，图(6)中的1645成为着2色的H图。综合上述讨论，由定义$r(H, H)\leqslant 6$，所以有$r(H, H)=6$。

(b) 由于$m-1$可整除$n-1$，令$p(m-1)=n-1$，G为每部是$m-1$个顶点的完全$(p+1)$-部图，$\nu(G)=(p+1)(m-$

1)=m+n-2，显然它不含 $K_{1,n}$，G^c 不含 T，故 $r(T,K_{1,n})\geqslant v(G)+1=m+n-1$。另一方面对 K_{m+n-1} 的任一2-边着色中，若着2色的边构成 G_1，则着1色的边构成 G_1^c。若 G_1 中不含 $K_{1,n}$ 子图时，则 $\Delta(G_1)\leqslant n-1$，故 $\delta(G_1^c)=(m+n-2)-\Delta(G_1)\geqslant(m+n-2)-(n-1)=m-1$。由练习 2.1.11 知，$G_1^c$ 中含有 T 子图，故由定义 $r(T,K_{1,n})\leqslant m+n-1$。于是 $r(T,K_{1,n})=m+n-1$。

(c) 设 G 是每部为 $m-1$ 个顶点的完全 $(n-1)$-部图，显然 G 中不含 K_n，G^c 不含 T。故 $r(T,K_n)\geqslant(m-1)(n-1)+1$。另一方面当 $n=1$ 时，显然 $r(T,K_1)=1$；当 $n\geqslant2$ 时，用归纳法来证明。若 $n-1$ 结论已成立。考虑 $K_{(m-1)(n-1)+1}$ 的任一2-边着色，设它着1色的边构成 G_1，则着2色之边构成 G_1^c。若 G_1 中不含某个 T，则由练习 2.1.11知，存在 $v_0\in V(G_1)$，$d_{G1}(v_0)\leqslant m-2$。于是 $d_{G_1^c}(v_0)=(m-1)(n-1)-d_G(v_0)\geqslant(m-1)(n-1)-(m-2)=(m-1)(n-2)+1$。在 G_1^c 中和 v_0 相邻的顶点所成之集合在 $K_{(m-1)(n-1)+1}$ 中的生成子图记为 $Kd_{G_1^c}(v_0)$，且保持原来的边着色。由归纳法假设，$Kd_{G_1^c}(v_0)$ 的着2色的边集中含有 K_{n-1} 子图，对这个 K_{n-1} 和 v_0 的联 $K_{n-1}\vee\{v_0\}=K_n$ 则是 $K_{(m-1)(n-1)+1}$ 中着的2色的子图。按定义有 $r(T,K_n)\leqslant(m-1)(n-1)+1$。故由归纳法对一切的 n 均成立 $r(T,K_n)\leqslant(m-1)(n-1)+1$。所以 $r(T,K_n)=(m-1)(n-1)+1$。

(关于Ramsey数的进一步理论，可参阅 R.G.Graham, B.L.Rothschild, and J.H.Spencer,《Ramsey Theory》Wiley, New York(1980)．或参阅J.Graph Theory Vol 7, No1(1983)纪念 F.P.Ramsey的专辑。)

7.3 Turán定理

定理7.8 (P.Turán 1941) 若单图G不含K_{m+1}，则存在完全m-部图H，H的度优于G，即H的不增度序列的各分量均不小于G的不增度序列的相应分量，且当G和H有相同的度序列时，则$G\cong H$。

定理7.9 若单图G不含K_{m+1}，则$\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(T_{m,\nu})$，且当$\varepsilon(G)=\varepsilon(T_{m,\nu})$时，则$G\cong T_{m,\nu}$。

("极图理论"是近年来图论中比较活跃的分支之一，Turán定理是这一分支的先驱工作。它研究具备某种性质的某一类图，使图的参量达到极值的极图问题。例如练习〔1.4.6〕、〔1.4.7〕等均属于它的内容。有关这方面进一步知识，可参阅B.Bollobás《Extremal Groph Theory》,Acad.press(1978))。

7.3.1 在一个九人组成的团体中，有一人认识另外两个人，有两个每人都认识另外四个人，有四个人都认识另外五个人，剩下来的最后两人每个人认识另外六个人，证明其中有三人是彼此互相认识的。

证： 将团体内的每一个人看成图G的顶点，两点相邻的充要条件是对应的两人相互认识。若G存在，则它的度序列为(6, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 2)，现多次利用练习1.5.7(a)的结果，我们有(6, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 2)→(5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 2)→(3, 3, 3, 3, 3, 3, 2)→(3, 3, 2, 2, 2, 2,)→(2, 2, 2, 1, 1)→(1, 1, 1, 1)，由于(1, 1, 1, 1)

是 K_3+K_3的度序列，故 G 确实存在。计算 $\varepsilon(G)=\frac{1}{2}(1\times 2+2\times 4+4\times 5+2\times 6)=21$，$\varepsilon(T_{2,8})=20$。故由定理7.9知$G$中含有$K_3$，所以结论成立。

7.3.2 某个桥牌俱乐部订了一个特殊的规则，仅当四人中无二人曾经相互做过伙伴才能一起玩，在一次有14个会员参加的集会中，他们每一个均曾已和其它5人做过伙伴，三局以后，按俱乐部规则只能停止，正当他们准备离开时，他们都不认识的一个新会员来了，证明现在至少还有一局可以玩。

证：我们将俱乐部的成员看成G中的顶点，两点间联以边的充要条件是对应的两成员间未曾做过伙伴。由题意14人共有$\binom{14}{2}=91$个配对，每人曾与其它人进行5次配对，共$(14\times 5)/2=35$次配对，今又进行三局共6次配对，故$\varepsilon(G)=91-35-6=50$，而$\varepsilon(T_{2,14})=49$，于是由定理7.9知，在$G$中含有$K_3$子图，这$K_3$中的三顶点对应的三个成员和新来的成员间可以进行一局桥牌游戏。

7.3.3 (*a*)证明：若G是单图且$\varepsilon>\nu^2/4$，则G含有三角形。

(*b*) 找一个$\varepsilon=\nu^2/4$的单图G，它不含有三角形。

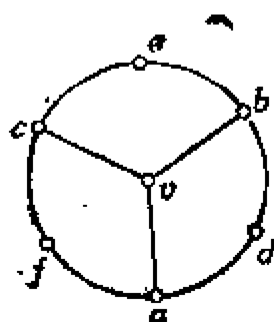
(*c*) 证明：若G是单图，但不是2-部图，且$\varepsilon>(\nu-1)^2/4+1$，则G含有三角形。

(*d*) 找一个非2-部图的单图G，且$\varepsilon=[(\nu-1)^2/4]+1$，它不含三角形。 (P.Erdös)

证：(*a*) 因为$\varepsilon(T_{2,\nu})=\begin{cases}\nu^2/4 & \nu=\text{偶数}\\(\nu^2-1)/4 & \nu=\text{奇数}\end{cases}\leqslant\nu^2/4$，故由定理7.9知，结论成立。

(b) 取$G=T_{2,\nu}$即可。

(c) 用反证法，若存在满足条件的单图G，它不是2-部图，不含三角形，且$\varepsilon(G)>(\nu-1)^2/4+1$。从而由定理1.2知$G$中含有奇圈，取$G$中长度最短的奇圈记为$C$，则$|V(C)|=m\geqslant5$。首先$V(G)\setminus V(C)$中的每一个顶点和$C$中的顶点至多有两条边相连，不然如图所示，$v\in V(G)\setminus V(C)$，它和$C$有二点以上相连，任取其中三点，记为$a$，$b$，$c$，又由于$G$中不含三角形，故图中的$d$、$e$、$f$点恒存在，于是易知$a\cdots d\cdots bv$、$b\cdots e\cdots cv$、$c\cdots f\cdots av$圈的长度均小于$m$，且这三个圈中至少有一个是奇圈，这和$C$的取法矛盾。其次$V(C)$顶点间除$C$上之边外不可能再有其它之边。否则它又和$C$的取法相矛盾。令$G_1=G-V(C)$，故$\varepsilon(G_1)\geqslant(\nu-1)^2/4+2-2(\nu-m)-m>(\nu-m)^2/4=(\nu(G_1))^2/4$。由(a)知，$G_1$含有三角形，这和假设矛盾。从而$G$含有三角形。



7.3.3 图

(d) 当$\nu\geqslant5$，将$T_{2,\nu-1}$的一条边重分所得之图显然不含三角形，再由(a)知边数满足要求。但$\nu\leqslant4$时不存在满足要求的图。

7.3.4 (a) 证明：若G是单图，且$\sum_{v\in V(G)}\binom{d(v)}{2}>(m-1)\binom{\nu}{2}$，则$G$含有$K_{2,m}(m\geqslant2)$。

(b) 证明：若G是单图，且$\varepsilon>(m-1)^{1/2}\nu^{3/2}/2+\nu/4$，

则 G 含有 $K_{2,m}$ $(m\geqslant 2)$。

(c) 证明：在平面上任意给定的 n 个点，两点间距离恰为 1 的点对对数最多是 $\frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}}+\frac{n}{4}$。

证：(a) 考虑如下形式的向量 $(v_0, (v', v''))$，其中 v_0v'，$v_0v''\in E(G)$，于是这种向量在 G 中的个数为 $\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{2}$，且在 G 中恒存在一对顶点 v'，v''，以 (v', v'') 为分量的向量个数 $\geqslant m$。事实上，假如不然，则 G 的这种形式的向量个数最多有 $(m-1)\binom{v}{2}$ 个，但这与 $\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{2}>(m-1)\binom{v}{2}$ 相矛盾。现任取以 (v', v'') 为分量的 m 个向量 $(v_i, (v', v''))$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，于是 $\{v_iv', v_iv'';\ i=1, 2, \cdots, m\}$ 在 G 中的导出子图即为 $K_{2,m}$。故 G 中含有 $K_{2,m}$。

(b) 在 ε 固定的条件下，将 $d(v)$ 看成连续变量，用 Lagrange 乘数法，求条件极值，易知当所有的 $d(v)=\frac{2\varepsilon}{v}$ 时，$\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{2}$ 达到极小值，故 $\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{2}\geqslant\varepsilon\left(\frac{2\varepsilon}{v}-1\right)$。另一方面，由假设 $\varepsilon>\frac{1}{2}(m-1)^{1/2}v^{3/2}+\frac{v}{4}\geqslant\frac{1}{4}\left\{v+\sqrt{v^2+4(m-1)v^2(v-1)}\right\}$，$m\geqslant 2$ 时，推出不等式 $4\varepsilon^2-2v\varepsilon-(m-1)v^2(v-1)>0$ 成立，即 $\varepsilon\left(\frac{2\varepsilon}{v}-1\right)>(m-1)\binom{v}{2}$。故有 $\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{2}>(m-1)\binom{v}{2}$。于是由 ($a$) 知，$G$ 含有 $K_{2,m}$。

(*c*) 将任取的平面上的 n 个点看作 G 的顶点，两顶点间连以边的充要条件是两点间距离为 1，则 G 是单图。且因为平面上一点 v_0 到另外三点的距离均为 1 时，则这三点必须在以 v_0 为心的单位圆周上。因两个不同的圆最多只有两个交点，从而 G 中不可能含有 $K_{2,3}$。今若 $\varepsilon(G)>\frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}}+\frac{n}{4}$，则由 (*b*) 知，$G$ 中必含 $K_{2,3}$，矛盾。故 $\varepsilon(G)\leqslant\frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}}+\frac{n}{4}$，即平面上 n 个点，两点间距离恰为 1 的点对对数最多是 $\frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}}+\frac{n}{4}$。

7.3.6 证明：若 G 是单图，且 $\varepsilon>\frac{1}{2}\{(m-1)^{1/m}\nu^{2-1/m}+(m-1)\nu\}$ 时，则 G 含有 $K_{m,m}$。

证：由于 $\varepsilon>\frac{1}{2}\{(m-1)^{1/m}\nu^{2-1/m}+(m-1)\nu\}$，故有 $\frac{2\varepsilon}{\nu}>(m-1)^{1/m}\nu^{1-1/m}+(m-1)$，即 $\frac{2\varepsilon}{\nu}-m+1>(m-1)^{1/m}\cdot\nu^{1-1/m}$。于是令 $\binom{d}{m}=\frac{1}{m!}d(d-1)\cdots(d-m+1)$；且令 $d<m$ 时，$\binom{d}{m}=0$。当 $d=\frac{2\varepsilon}{\nu}$ 时，$\nu\binom{d}{m}=\frac{1}{m!}\nu\cdot\frac{2\varepsilon}{\nu}\cdot\left(\frac{2\varepsilon}{\nu}-1\right)\cdots\cdot\left(\frac{2\varepsilon}{\nu}-m+1\right)\geqslant\frac{1}{m!}\nu\left(\frac{2\varepsilon}{\nu}-m+1\right)^m\geqslant\frac{1}{m!}\nu\left\{(m-1)^{1/m}\cdot\nu^{1-1/m}\right\}^m=\frac{1}{m!}(m-1)\nu^m>\frac{1}{m!}(m-1)\nu(\nu-1)\cdots(\nu-m+1)=(m-1)\binom{\nu}{m}$。另一方面，在 ε 固定的条件下，将 $d(v)$ 看成

连续变量，用Lagrange乘数法，求条件极值，易知当所有的 $d(v)=\frac{2e}{v}\doteq d$ 时，$\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{m}$达到极小值，故$\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{m}\geq v\binom{d}{m}>(m-1)\binom{v}{m}$。下面我们完全类似于练习7.3.4(a)的证明，考虑如下形式的向量$(v_0,(v^{(1)},v^{(2)},\cdots,v^{(m)}))$，其中$v_0v^{(1)},v_0v^{(2)},\cdots,v_0v^{(m)}\in E(G)$，于是这种向量在$G$中的个数为$\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{m}$，且在$G$中恒存在$m$个顶点$v^{(1)},v^{(2)},\cdots,v^{(m)}$，以$(v^{(1)},v^{(2)},\cdots,v^{(m)})$为分量的向量个数$\geq m$，事实上假如不然，则$G$的向量个数最多有$(m-1)\binom{v}{m}$个，但这与上面导出的$\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{m}>(m-1)\binom{v}{m}$相矛盾。现取以$(v^{(1)},v^{(2)},\cdots,v^{(m)})$为分量的$m$个向量$(v_i,(v^{(1)},v^{(2)},\cdots,v^{(m)}))$ $(i=1,2,\cdots,m)$，于是$\{v_iv^{(1)},v_iv^{(2)},\cdots,v_iv^{(m)};i=1,2,\cdots,m\}$在$G$中的导出子图即为$K_{m,m}$，故$G$中含有$K_{m,m}$。

7.4 Schur定理

定理7.10 设$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$是整数集合$\{1,2,\cdots,r_n\}$的任意一个分划，其中r_n是练习7.2.3中定义的Ramsey数；则对某一个i，S_i中存在三个整数x，y和z，满足方程，$x+y=z$。

7.4.1 证明：$s_1=2$；$s_2=5$；$s_3=14$（这里s_n表示满足下

列条件的最小整数：把$\{1, 2, \cdots, s_n\}$分成n个子集的任意划分中，总存在一个子集包含方程$x+y=z$的解，其中x, y, z是整数，但可以相同)。

证：集合$\{1\}$无方程的解，故$s_1 \geqslant 2$；集合$\{1, 2\}$有方程的解，得$s_1 \leqslant 2$；因而$s_1 = 2$。

集合$\{1, 2, 3, 4\}$的2分划：$(\{1, 4\}, \{2, 3\})$，它的两个子集均不含方程的解。故$s_2 \geqslant 5$；考察集合$\{1, 2, 3, 4, 5\}$的2分划。因$s_1 = 2$，故其中1，2在一子集中的分划必含方程的解，只需考察1,2分在不同子集的分划：$(\{1\}, \{2\})$，将3加进去得$(\{1, 3\}, \{2\})$与$(\{1\}, \{2, 3\})$，均无方程之解，又加进4，前者成$(\{1, 3, 4\}, \{2\})$，$(\{1,3\}, \{2,4\})$。后者成$(\{1\}, \{2, 3, 4\})$，$(\{1, 4\}, \{2, 3\})$，只有最后一种无方程的解，但将5加进后，也有解。故$s_2 = 5$。

由书中本节开头例子知，$s_3 > 13$，进一步考察$\{1, 2, \cdots, 14\}$的任意3分划。因$s_2 = 5$，故将1，2，3，4，5分在两个子集中的分划，有方程之解。此外，若1，2；2，4；1，3，4；2，3，5；1，4，5分在一个子集者也有方程之解。因而，只需考察如下11种情况：

$(\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\})$，$(\{1\}, \{2, 3\}, \{4,5\})$，$(\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\})$，$(\{2\}, \{4\}, \{1, 3, 5\})$，$(\{2\}, \{1,3\}, \{4,5\})$，$(\{2\}, \{1, 4\}, \{3, 5\})$，$(\{2\}, \{1, 5\}, \{3,4\})$，$(\{3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\})$，$(\{4\}, \{1, 3\}, \{2, 5\})$，$(\{4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\})$，$(\{5\}, \{1, 4\}, \{2, 3\})$。

对上述各种情况，逐个加入6—14的各数，可证任一3划分都有方程之解。故$s_3 = 14$。

7.4.2 (a)证明：$s_n \geqslant 3s_{n-1} - 1$，$n$为$\geqslant 2$的自然数。

(b) 利用(a)的结果和 $s_3=14$，证明：

$$s_n \geqslant \frac{1}{2}(3^n+1).$$

(1966年 H.L.Abbott 和 L.Moser 在 Acta Arith.已得到它的一个更好的下界)。

证：由 s_{n-1} 定义知，总可找到$\{1, 2, \cdots, s_{n-1}-1\}$的一个 $n-1$ 分划$(P_1, P_2, \cdots, P_{n-1})$使得每一个 P_k 内没有方程的解。下面我们构造$\{1, 2, \cdots, 3s_{n-1}-2\}$的一个 n 分划如下：

$$\bar{P}_k=\{a_i, b_i \mid a_i\in P_k, a_i+b_i=3s_{n-1}-1\},$$
$$(k=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\bar{P}_n=\{s_{n-1}, \cdots, 2s_{n-1}-1\}$$

下面我们证明这个 n 分划各子集无方程之解：

因 $2s_{n-1}>2s_{n-1}-1$，故$\bar{P}_n$中无方程的解。

对$\bar{P}_k(k<n)$，设 $a_i, a_j, b_i, b_j\in\bar{P}_k$，由$\bar{P}_k$构造知：$a_i, a_j, \in P_k$且$a_i+b_i=a_j+b_j=3s_{n-1}-1$。

(1) 当 $a_i+a_j\geqslant s_{n-1}$时，因 $a_i, a_j\in P_k$有

$a_i+a_j\leqslant 2s_{n-1}-2$ 故 $a_i+a_j\notin\bar{P}_k$。

(2) 当 $a_i+a_j<s_{n-1}$时，因 P_k 内无方程的解，所以 $a_i+a_j\notin\bar{P}_k$。

(3) $b_i+b_j\geqslant 4s_{n-1}\geqslant 3s_{n-1}+s_1>3s_{n-1}-2$故$b_i+b_j\notin\bar{P}_k$。

(4) $a_j+b_i=a_j+3s_{n-1}-1-a_i=3s_{n-1}-1+(a_j-a_i)$，

① 若 $a_j-a_i\geqslant 0$，则 $a_j+b_i\notin\bar{P}_k$。

② 若 $a_j-a_i<0$，因$(a_j+b_i)+(a_i-a_j)=3s_{n-1}-1$知，若$a_j+b_i\in\bar{P}_k$，则$a_i-a_j\in P_k$，再由 $a_j+(a_i-a_j)=a_i$推出P_k中有方程的解，矛盾！故 $a_j+b_i\notin\bar{P}_k$。

综上所述 $F_k(k<n)$ 中也无方程之解。故而

$s_n \geqslant 3s_{n-1}-1$。

(b) 当 $n=2,3$ 时，由练习7.4.1结果直接验证不等式成立。今假定 $n=k$ 时，不等式成立，则当 $n=k+1$ 时，由(a)知，$s_{k+1} \geqslant 3s_k - 1 \geqslant 3\cdot\frac{1}{2}(3^k+1)-1=\frac{1}{2}(3^{k+1}+1)$，从而由归纳法，不等式成立。

7.5 一个几何问题

定理7.11 若 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面上直径为1的点集。那么，距离大于 $1/\sqrt{2}$ 的点对的最大可能数目为 $[n^2/3]$。此外，对每个 n，都有一个直径为1的集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，它恰好有 $[n^2/3]$ 对顶点的距离大于 $1/\sqrt{2}$。

7.5.1 设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面上直径为1的集合。

(a) 证明距离为1的点对最大可能数目是 n。

(b) 构造一个平面上直径为1的集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，使它恰有有 n 对距离为1的点对。 (E.Pannwitz)

证： (a)设图 $G=(V(G), E(G))$，其中 $V(G)=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$E(G)=\{x_ix_j \mid d(x_i, x_j)=1\}$。

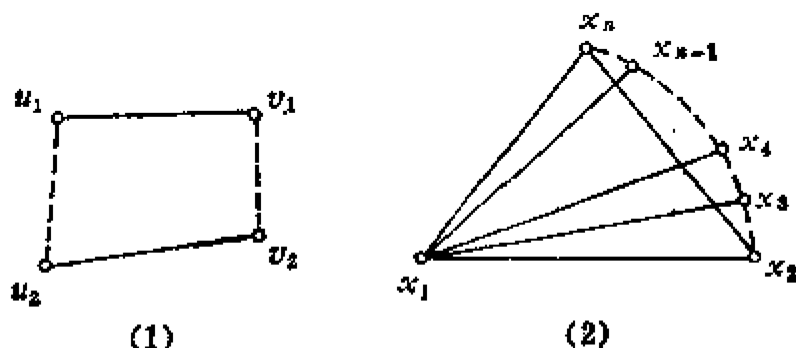
我们要证 $|E(G)| \leqslant n$。先证 G 有如下性质(i)，(ii)：

(i) G 的任意二条边若不相邻，则必相交。不然，设 G 的二边 u_1v_1、u_2v_2 既不相邻又不相交，则四边形 $u_1v_1u_2v_2$ 中，如图(1)，总有不小于90°的内角存在，不妨设

$$\angle u_2v_2v_1 \geqslant 90^\circ$$

则有 $d(u_2, v_1)>1$，这与假设矛盾。

(ii) 若 $u \in V(G)$，$d(u)=k>2$，则 u 的邻点 u_1，u_2，



7.5.1 图

$\cdots$, u_k, 依次落在 u 为中心的单位圆周上，且 $d(u_i)=1$,
$(i=2, \cdots, k-1)$。不然就会出现既不相邻又不相交的边，这与(i)矛盾！

现对G逐次去掉悬挂边：由(ii)最后所得之图 G_1 的每个分支只可能或是平凡图或是 K_3，故对 G_1有$|E(G_1)|\leqslant|V(G_1)|$，所以，我们有$|E(G)|\leqslant n$.

(*b*) 作图G：$\triangle x_1x_2x_n$为等边三角形，且边长为1．以x_1为圆心，1为半径，从x_2到x_n作虚圆弧，在圆弧上顺序取顶点x_3, x_4, $\cdots$, x_{n-1}，使它们分别与x_1相连，如图(2)，它们恰好构成n个距离为1的点对。

7.5.2 半径为6英里的圆形城市，由十八辆警车巡逻，色们之间用无线电通讯联系。若无线电使用范围为9英里，证明不管什么时刻最少有两辆车，每一辆车可以和其余五辆车通讯联系。

证：根据定理7.11，有

$$e\left(x_ix_j\left|\frac{d(x_i,\ x_j)}{12}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{9}{12}\right.\right)\geqslant\binom{18}{2}-\left[\frac{18^2}{3}\right]=45$$

$$(*)$$

即最少有45对车可以互相通讯。若题目所述情况不成立，就是不存在两个5度以上的顶点(车)。则

$$s\left(x_i x_j \middle| \frac{d(x_i,\ x_j)}{12} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq (1\times 17+17\times 4)/2<43$$

说明在这种情况下，最多有43对车可以互相通讯，这与(*)式矛盾。所以，题目所述结论成立。

第八章 顶 点 着 色

8.1 色 数

定义：G 的**顶点 k-着色**，是将 k 种颜色分配给 $V(G)$ 的一种分配方法。即将 $V(G)$ 分划成 $(V_1, V_2, \cdots, V_k)$，在 V_i 中的顶点均着 i 色。在 G 的顶点 k-着色中，如果没有两个相邻顶点着同一颜色，即上述分划中 $V_i(i=1,2,\cdots,k)$ 均是 G 中的独立集，则称这种顶点 k-着色是**正常的**。上面简称正常的顶点 k-着色为 **k-着色**，当 G 有一个 k-着色时，称 G 是 **k-可着色的**。

定义：**色数** $\chi(G) = \min\{k \mid G$ 是 k-可着色的$\}$。若 $\chi(G)=k$，则称 G 是 **k-色图**。

定义：若 G 的任意真子图 H 均有 $\chi(H)<\chi(G)$，则称 G 是**临界图**。

显然 G 是 k-可着色的充要条件是 G 的底图亦是 k-可着色，故本章均假定图是单图。

定理8.1 若 G 是 k-临界图，则 $\delta \geqslant k-1$。

系8.1.1 每个 k-色图都最少有 k 个度不小于 $k-1$ 的顶点。

系8.1.2 对任一个图 G 都有 $\chi \leqslant \Delta+1$。

定理8.2 在临界图中，没有一个顶点割集是团。

系8.2 临界图是一个块。

系8.3 G 是 k-临界图，且有 2 顶点割集 $\{u, v\}$，则 $d(u)+d(v)\geqslant 3k-5$。

8.1.1 证明：若 G 是单图，则 $\chi(G)\geqslant v^2/(v^2-2\varepsilon)$。

证：因为 $\chi(G)=\chi$，则 $V(G)$ 可分划成 χ 个独立集。设第 i 个独立集的元素个数记为 n_i，则 $\sum_{i=1}^{\chi} n_i=v$。且 $2\varepsilon(G)\leqslant 2\varepsilon(T_{\chi,v})=\sum_{i=1}^{\chi} n_i(v-n_i)=v^2-\sum_{i=1}^{\chi} n_i^2$。

若将 n_i 看成连续变量，由 Lagrange 乘数法知，当 $n_i=v/\chi$ 时，$\sum_{i=1}^{\chi} n_i$ 达到极小值 $\chi(v/\chi)^2=v^2/\chi$。于是有 $v^2-2\varepsilon\geqslant\sum_{i=1}^{\chi} n_i^2\geqslant v^2/\chi$。所以

$$\chi\geqslant\frac{v^2}{(v^2-2\varepsilon)}$$

8.1.2 证明：若 G 中任意两个奇圈均有一个公共顶点，则 $\chi\leqslant 5$。

证：若 $\chi\geqslant 6$，且假定在 G 上已用 χ 种颜色着色。令 G_1 是 G 中着 1，2，3 色的顶点在 G 中的导出子图，G_2 是 G 中着 4，5，…，χ 色的顶点在 G 中的导出子图。显然 $\chi(G_1)=3$，$\chi(G_2)=\chi-3\geqslant 3$。由于 2-部图的色数为 2，故 G_1，G_2 均不是 2-部图，所以在 G_1，G_2 中均含有奇圈且它们互不相交，这和假设矛盾，故 $\chi\leqslant 5$。

8.1.3 证明：若 G 有度序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_v)$，且 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_v$，则 $\chi\leqslant\max_i \min\{d_i+1, i\}$。

(D.J.A.Welsh 和 M.B.Powell)

证：由系 8.1.1 至少有 χ 个度不小于 $\chi-1$ 的顶点，即

$d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_\chi \geqslant \chi-1$。故 $\chi \leqslant d_\chi+1$，$\chi=\min\{d_\chi+1, \chi\}$。从而有 $\chi \leqslant \max\limits_i \min\{d_i+1, i\}$。

8.1.4 利用练习 8.1.3 证明：

(a) 当 $\varepsilon>0$ 时，$\chi \leqslant \{(2\varepsilon)^{1/2}\}$；

(b) $\chi(G)+\chi(G^c) \leqslant \nu+1$；

(c) $\chi(G)\chi(G^c) \leqslant \left[\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2\right]$。

(E.A.Mordhaus和J.W.Gaddum)

证：(a)当 $\chi>1$ 时，$\chi>(\chi(\chi-1))^{1/2}>\chi-1$，故 $\{(\chi(\chi-1))^{1/2}\}=\chi$。另一方面，由练习8.1.3知，存在某个 $k \leqslant \nu$，$\min\{d_k+1, k\} \geqslant \chi(G)$，即 $d_k+1 \geqslant \chi(G)$，$k \geqslant \chi(G)$。于是由定理1.1，$2\varepsilon=\sum\limits_{i=1}^{\nu} d_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} d_i \geqslant kd_k \geqslant \chi(\chi-1)$。所以有 $\{(2\varepsilon)^{1/2}\} \geqslant \{(\chi(\chi-1))^{1/2}\}=\chi$。

(b)由练习 8.1.3 知，存在 k，k'，成立 $k \geqslant \chi(G)$、$d_k+1 \geqslant \chi(G)$；$k' \geqslant \chi(G^c)$、$d_k{}'(G^c)+1 \geqslant \chi(G^c)$。下面分两种情况讨论：(1)若 $k' \geqslant \nu-k+1$。于是由 $\nu-1=d_k(G)+d_{\nu-k+1}(G^c) \geqslant d_k(G)+d_k{}'(G^c) \geqslant (\chi(G)-1)+(\chi(G^c)-1)$。所以 $\nu+1 \geqslant \chi(G)+\chi(G^c)$。

(2)若 $k'<\nu-k+1$，于是 $\nu+1=k+(\nu-k+1) \geqslant k+k' \geqslant \chi(G)+\chi(G^c)$。故命题成立。

(c)如同(b)，分两种情况：(1)若 $k' \geqslant \nu-k+1$，则 $\chi(G)\chi(G^c) \leqslant (d_k(G)+1)(d_k{}'(G^c)+1)=d_k(G)d_k{}'(G^c)+d_k(G)+d_k{}'(G^c)+1 \leqslant d_k(G)d_k{}'(G^c)+\nu$。又用求极值的方法，得 $d_k(G)d_k{}'(G^c) \leqslant \left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2$，所以 $\chi(G)\chi(G^c) \leqslant \left[\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2\right]$。

(2)若 $k'<\nu-k+1$，则 $\chi(G)\chi(G^c) \leqslant kk' \leqslant k\nu-k^2+k \leqslant$

$-\left(k-\frac{\nu+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2$。故命题成立。

(H.J.Finck 1966年证明了(b)、(c)达到上界的所有正则图，对(b)只有K_ν，K_ν^c和C_5；对(c)只有K_1，K_2，K_2^c和C_5。

又E.A.Nordhaus和J.W.Gaddum 1956年还证明对应(b)、(c)的下界如下：

$(b')2\sqrt{\nu}\leqslant\chi(G)+\chi(G^c)$

$(c')\nu\leqslant\chi(G)\chi(G^c)$

这下界同样不能再改进。)

8.1.5 证明：$\chi(G)\leqslant1+\max\delta(H)$，这里是对$G$的所有导出子图$H$取最大值的。

(G.Szekeres和H.S.wilf)

证：取G的χ-临界子图G_1作为H，由定理8.1知，$1+\delta(G_1)\geqslant\chi(G)$，故$\chi(G)\leqslant1+\max\delta(H)$成立。

8.1.6 若k-色图G有一种着色法，使得每一种颜色最少着了G中的两个顶点。证明：G有一个这种类型的k-着色法。

(T.Gallai)

证：令$\mathscr{C}'$是G的一种着色法，使得每一种颜色至少着了G中的两个顶点.由假设这种$\mathscr{C}'$是存在的。若$\mathscr{C}'$是k-着色，结论已成立，否则令$\mathscr{C}$是G的k-着色中，使仅含一个顶点的色类的色类数n_0为最小的某一个k-着色.若$n_0>0$,设$\mathscr{C}$的色分划为$(V_1,V_2,\cdots,V_k)$,不失一般性假定$V_1=\{v_1\}$。由$\mathscr{C}'$的性质，可假定存在$u_2\in V_2,v_1,u_2$在$\mathscr{C}'$中着同色。于是我们得到一个新的k-着色$\mathscr{C}_1=(V_1^{(1)},V_2^{(1)},\cdots,V_k^{(1)})$，其中$V_1^{(1)}=\{v_1,u_2\}$，$V_2^{(1)}=V_2\setminus\{u_2\}$,$V_i^{(1)}=V_i(i=3,\cdots,$

k)，显然若$|V_2^{(1)}|\geq 2$，有$n_{\mathscr{C}_1}<n_{\mathscr{C}}$，这和$\mathscr{C}$的选取矛盾，故$V_2^{(1)}=\{v_2\}$，且$v_1$，$v_2$在$\mathscr{C}'$中着不同色，不然我们将$V_1^{(1)}\cup V_2^{(1)}$均着以1色，$\mathscr{C}_1$中其余顶点着色不变，于是我们得到$G$的一个$(k-1)$-着色，这又与$G$是$k$-色图矛盾。于是类似对$V_1=\{v_1\}$的讨论，存在$u_3\in V_3^{(1)}$，$v_2$，$u_3$在$\mathscr{C}'$中着同色，和$G$的一个新的$k$-着色$\mathscr{C}_2=(V_1^{(2)}, V_2^{(2)},\cdots,V_k^{(2)})$，$V_2^{(2)}=\{v_2, u_3\}$，$V_3^{(2)}=V_3^{(1)}\setminus\{u_3\}$，其余色类不变，且$V_3^{(2)}=\{v_3\}$，$v_1$，$v_2$，$v_3$在$\mathscr{C}'$中均着不同色。如此继续下去，最后我们得到$\mathscr{C}_{k-1}=(V_1^{(k-1)}, V_2^{(k-1)}, \cdots, V_k^{(k-1)})$，其中$V_i^{(k-1)}=\{v_i, u_{i+1}\}$，$i=1, 2, \cdots, k-1$，它们在$\mathscr{C}'$中着同色，且$v_1,v_2,\cdots,v_k$，在$\mathscr{C}'$中着不同的颜色。若$|V_k^{(k-1)}|\geq 2$，则和$\mathscr{C}$的选取相矛盾。若$V_k^{(k-1)}=\{v_k\}$，则按$\mathscr{C}'$的性质，应在$G$中存在$U_{k+1}$，$U_{k+1}$和$v_k$在$\mathscr{C}'$中着同色，但$U_{k+1}\notin V_i^{(k-1)}(i=1, 2, \cdots, k-1)$。故这种$U_{k+1}$在$G$中不存在，矛盾。综合上述，故$n_{\mathscr{C}}=0$。命题成立。

8.1.7 证明：仅有的1-临界图是K_1，仅有的2-临界图是K_2，而仅有的3-临界图是k-奇圈($k\geq 3$)。

证：由于1-色图是空图，从而1-临界图仅能是K_1；2-色图是2-部图，从而2-临界图仅能是K_2；3-色图恒含奇圈。且奇圈至少是3-色才能正常着色，从而3-临界图仅能是k-奇圈($k\geq 3$)。

8.1.8 若G的任意两个k-着色均诱导出相同的$V(G)$的分划，则称G是**唯一的k-可着色的**。证明k-临界图的任一个顶点割集都不能导出一个唯一的$(k-1)$-可着色的子图。

证：设k-临界图G，存在一个顶点割集C，$G[C]$是一

个唯一的$(k-1)$-可着色子图。若$G-C$离散成G_1，G_2两个子图，由于k-临界图一定是连通的，故可分别取点$v_1\in G_1$，$v_2\in G_2$使v_1，v_2与$G[C]$均有边相连，连边分别记为e_1，e_2。由G的k-临界性，知$\chi(G-e_1)\leqslant k-1$，$\chi(G-e_2)\leqslant k-1$。故存在正常的$(k-1)$-着色$\mathscr{C}_1$和$\mathscr{C}_2$，分别对$G[C\cup V(G_1)]$、$G[C\cup V(G_2)]$着色，且由于$G[C]$是唯一的$(k-1)$-可着色图，从而在$\mathscr{C}_1$、$\mathscr{C}_2$着色中可假定$G[C]$有相同着色，于是将$\mathscr{C}_1$、$\mathscr{C}_2$着色合并起来就成为G的一个正常的$(k-1)$-着色，但这与$\chi(G)=k$相矛盾，故结论成立。

8.1.9 (a)证明：若u，v是临界图的两个顶点，则$N(u)$不是$N(v)$的子集；(b) 证明不存在$k+1$个顶点的k-临界图G。

证：(a)若$N(u)\subseteq N(v)$，由于$v\notin N(v)$，故$v\notin N(u)$，所以u，v不相邻。又因G是k-临界图，故对$G-u$存在$(k-1)$-正常着色。若在此基础上令u和v着同色，则最后得到G上的一个$(k-1)$-正常着色，于是$\chi(G)\leqslant k-1$。这和G是k-色图相矛盾，故$N(u)$不是$N(v)$的子集。

(b)若这样G存在，由定理8.1知，$\delta(G)\geqslant k-1$。另一方面显然$G\neq K_{k+1}$，故在G中存在两个不相邻的顶点v_1 v_2，由于$d(v_1)\geqslant\delta=k-1$，$d(v_2)\geqslant\delta=k-1$及$v(G)=k+1$，故$N(v_1)=N(v_2)$，但这与(a)相矛盾，故结论成立。

8.1.10 证明：(a)$\chi(G_1\vee G_2)=\chi(G_1)+\chi(G_2)$。

(b)$G_1\vee G_2$是临界图的充要条件是G_1、G_2均是临界图。

证：(a) 显然有$\chi(G_1\vee G_2)\leqslant\chi(G_1)+\chi(G_2)$，又若$G_1\vee G_2$存在正常$k$-着色，显然$G_1$中顶点所着之颜色，由联的定义，必然和$G_2$中顶点着的颜色均不相同，故又有$\chi(G_1$

$\vee G_2) \geqslant \chi(G_1)+\chi(G_2)$，所以 $\chi(G_1 \vee G_2)=\chi(G_1)+\chi(G_2)$。

$(b) \Rightarrow$：若 $G_1 \vee G_2$ 是临界图，而 G_1 不是临界图，则存在 G_1 的真子图 H，使 $\chi(H)=\chi(G_1)$，于是 $H \vee G_2$ 是 $G_1 \vee G_2$ 的真子图，但由 (a) 知 $\chi(H \vee G_2)=\chi(H)+\chi(G_2)=\chi(G_1)+\chi(G_2)=\chi(G_1 \vee G_2)$，这和 $G_1 \vee G_2$ 是临界图相矛盾；故 G_1 是临界图，类似可证明 G_2 亦是临界图。

$\Leftarrow$：若 G_1、G_2 是临界图，证明 $G_1 \vee G_2$ 亦是临界图。事实上我们仅需证明除去 $G_1 \vee G_2$ 中任一边 e 后，有 $\chi(G_1 \vee G_2-e)<\chi(G_1 \vee G_2)$ 即可。下面分两种情况讨论：(1) $e \in G_1$（$e \in G_2$ 类似讨论），于是由 (a)，$\chi(G_1 \vee G_2-e)=\chi((G_1-e) \vee G_2)=\chi(G_1-e)+\chi(G_2)<\chi(G_1)+\chi(G_2)=\chi(G_1 \vee G_2)$。(2) e 属于 G_1、G_2 两图之间的连边，设 $e=v_1^{(1)}v_1^{(2)}$，$v_1^{(1)} \in V(G_1)$，$v_1^{(2)} \in V(G_2)$。由于 G_1、G_2 是临界图，从而 $\chi(G_i-v_1^{(i)})<\chi(G_i)$，$i=1,2$。今用异于 1 色的 $\chi(G_1-v_1^{(1)})+\chi(G_2-v_1^{(2)})$ 种颜色对 $(G_1-v_1^{(1)}) \vee (G_2-v_1^{(2)})$ 正常着色，对 $v_1^{(1)}$、$v_1^{(2)}$ 着 1 色，显然这种着色法对 $G_1 \vee G_2-e$ 是正常的，从而由 (a)，$\chi(G_1 \vee G_2-e) \leqslant \chi(G_1-v_1^{(1)})+\chi(G_2-v_1^{(2)})+1<\chi(G_1)+\chi(G_2)=\chi(G_1 \vee G_2)$。故结论成立。

8.1.11 设 G_1 和 G_2 为恰好有一个公共顶点 v 的两个 k-临界图，vv_1、vv_2 分别是 G_1、G_2 的边。

证明：$(G_1-vv_1) \cup (G_2-vv_2)+v_1v_2$ 是 k-临界图。

(G.Hajós)

证：显然当 $k=1$，2 时结论不成立。故下面我们假定在 $k \geqslant 3$ 的条件下进行讨论。令 $G=(G_1-vv_1) \cup (G_2-vv_2)+v_1v_2$，首先由于 G_1、G_2 是 k-临界图，从而 $\chi(G_1-vv_1)=k-1$，$\chi(G_2-vv_2)=k-1$，分别用 1，2，…，$k-1$ 色对 G_1

$-vv_1$、G_2-vv_2进行正常$(k-1)$-着色，且使v在两图中均着1色，显然v_1、v_2也必须着的是1色，否则G_1或G_2则成为$(k-1)$-色图，这和G_1、G_2是k-临界图相矛盾。现将v_1改着k色，得G的一个k着色，故$\chi(G)\leqslant k$又若$\chi(G)<k$，则G有一个$(k-1)$-着色，其中v_1，v_2必着不同色，于是v必与v_1(或v_2)不同色；这与$\chi(G_i)=k$矛盾！故$\chi(G)=k$。其次若$e=v_1v_2$，显然由上讨论$\chi(G-e)=k-1<\chi(G)$；若$e\in G_1$，$e\neq vv_1$($e\in G_2$，$e\neq vv_2$类似讨论)，分别用1，2，…，$k-1$色对G_1-e、G_2-vv_2进行正常着色，且使v在两图中均着1色，v_1着2色，于是v_2必然着1色。两图的着色合起来的着色即为$G-e$的$(k-1)$-正常着色，故$\chi(G-e)\leqslant k-1<\chi(G)$。所以对$G$中任一边$e$，均有$\chi(G-e)<\chi(G)$。故$G$是$k$-临界图。

8.1.12 对于$n=4$和$\forall n\geqslant 6$，构作一个n个顶点的4-临界图。

证：对$n\geqslant 4$的偶数，易证轮W_{n-1}是4-临界图。对$n\geqslant 7$的奇数，易知存在两个大于等于4的偶数n_1，n_2使$n_1+n_2=n+1$，然后用练习8.1.11的结果对W_{n_1-1}、W_{n_2-1}构作n个顶点的4-临界图。

8.1.13 (a)设(X, Y)是$V(G)$的一个使$G[X]$、$G[Y]$均是n-可着色的分划，证明：若边割集$[X, Y]$至多有$n-1$条边，则G也是n-可着色的。 (P.C.Kainen)

(b)证明每一个k-临界图是$(k-1)$-边连通图。

(G.A.Dirac)

证：(a)设在$G[X]$、$G[Y]$上已n-正常着色了，$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$、$\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$分别是$G[X]$、$G[Y]$的

上述着色的色类。今构作一个2-部图H，$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$、$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$为它的顶点的二部分划，$x_i$，$y_i$相连以边的充要条件是$[X_i, Y_i]$在$G$中为空集。由于$|[X, Y]|\leqslant n-1$，故$\varepsilon(H)\geqslant n^2-(n-1)>n(n-1)$。于是由练习5.2.6($b$)知，$H$存在完全匹配$M$。设$x_iy_{f(i)}\in M(i=1, 2, \cdots, n)$，令$V_i=X_i\cup Y_{f(i)}$着同一色。于是$(V_1, V_2, \cdots, V_n)$是$G$上的一个$n$-正常着色的色类分划，故$G$是$n$-可着色的。

(b)若k-临界图G中存在$k-2$条边的边割集M，于是$G-M$不连通，设u，v分属于它的不同分支。令$C(u)$是$G-M$中含u的分支，令$C(u)$是$G-M$中含u的分支，$X=V(C(u))$、$Y=V(G)\setminus X$。于是$u\in X, v\in Y$。由于G是k-临界图，故$G[X]$、$G[Y]$均为$(k-1)$-可着色，于是由(a)知，G为$(k-1)$-可着色图。这与G是k-色图相矛盾，所以G中不存在$k-2$条边的边割集，即G是$(k-1)$-边连通的。

8.2 Brooks 定理

定理 8.4(R.L.Brooks, 1941) 若G是连通单图，它既不是奇圈，也不是完全图，则$\chi\leqslant\Delta$。

8.2.1 证明：Brooks定理等价于下述命题：若G是k-临界($k\geqslant4$)，且不是完全图，则$2\varepsilon\geqslant\nu(k-1)+1$。

证：$\Rightarrow$：由于$k\geqslant4$，故G不可能是奇圈，由假设G不是完全图，于是由Brooks定理$\Delta\geqslant k$，令$d_1=\Delta$，再由定

理 1.1 和定理 8.1 有 $2\varepsilon=\sum\limits_{i=1}^{v} d_i=\Delta+\sum\limits_{2}^{v} d_i\geqslant\Delta+(v-1)\delta\geqslant$ $\Delta+(v-1)(k-1)=\Delta-k+v(k-1)+1\geqslant v(k-1)+1$。

⇐：设 G 的 $\chi(G)$-临界子图记为 H，下面我们分三种情况讨论：(1) H 是奇圈。由于 G 是连通的非奇圈图，故在 G 中存在 H 外的边与 H 相连，所以 $\Delta(G)\geqslant 3$。另一方面 $\chi(G)=\chi(H)=3$，故有 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)$；(2) H 是完全图 $K_{\chi(G)}$。由于 G 的连通性及 G 不是完全图，故在 G 中存在 H 外的边与 H 相连，所以 $\Delta(G)\geqslant\chi(G)+1>\chi(G)$；(3) H 既不是奇圈又不是完全图，由练习 8.1.7 知，$\chi(H)\geqslant 4$，所以此时 H 满足命题的条件。于是有 $v\Delta(H)\geqslant 2\varepsilon(H)\geqslant v(\chi(G)-1)+1$。即 $\Delta(H)\geqslant\chi(G)-1+1/v$。所以有 $\Delta(G)\geqslant\Delta(H)\geqslant\chi(G)$。综合上述情况，命题成立。

8.2.2 用 Brooks 定理证明：若 G 是无环图，且 $\Delta=3$，则 $\chi'\leqslant 4$。

证：若 G 不连通，则考虑它的连通分支，若对它的连通分支命题均成立，则显然命题对 G 也成立。故不失一般性假定 G 是连通的。若 G 是三重图，则在 $\Delta=3$ 的条件下，G 仅能是 ⊂⊃ ，显然此时 $\chi'(G)=3<4$。若 G 是二重图，由于 $\Delta=3$，故 G 的二重边和其它顶点的相邻关系如



，这些子图均能 4-边着色。于是对 G 的底图 G'，假若 $\chi'(G')\leqslant 4$，则 $\chi'(G)\leqslant 4$。故下面不失一般性假定 G 是单图。设 $L(G)$ 表示 G 对应的线图，显然由 G 是连通单图，故 $L(G)$ 亦是连通单图。若 $L(G)$ 是奇圈，则 G 必须是奇圈或 $K_{1,3}$。此时 $\chi'(G)=3$，又若 $L(G)$ 为

完全图时，因为$\Delta=3$，故$\Delta(L(G))\leqslant 4$，所以$L(G)$只能是K_3、K_4、K_5。上面已讨论过K_3是奇圈，而K_4、K_5对应的G是$K_{1,4}$、$K_{1,5}$。这两图与$\Delta=3$相矛盾。若$L(G)$不是奇圈，也不是完全图，此时由Brooks定理$\chi'(G)=\chi(L(G))\leqslant\Delta(L(G))\leqslant 4$。综合上述，命题成立。

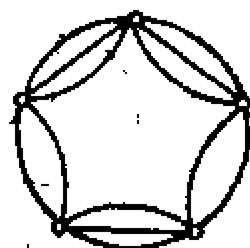
8.3 Hajós 猜测

Hajós猜猜(1961)："若G是k-色图，则G含有K_k的重分"。

对Hajós猜测，$k=1$，2，3时，由练习8.1.7知是对的；$k=4$时就是定理8.5。

定理8.5(G.A.Dirac, 1952)　若G是4-色图，则G包含一个K_4的重分。

对$k\geqslant 7$，P.A.Caflin在J.Comb, Theory B26,268—274,(1979)中，列举了如下反例。当$k=7$时，如图G的线图$L(G)$是一反例。当$k>7$时，$L(G)\vee K_{k-7}$是一反例。从而对Hajós猜测目前仅剩下$k=5$，6没有证明。



G

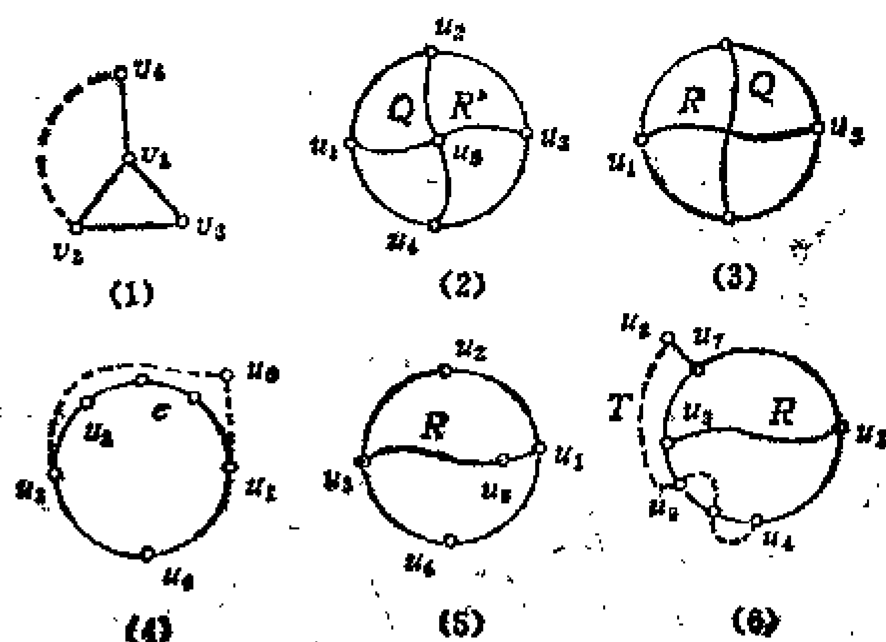
和Hajós猜测有联系的是Hadwiger猜测(1943)："若G是k-色图，则G可收缩成含有K_k子图的图。"Hadwiger猜测当$k=5$时，等价于四色猜测。它和Hajós猜测有很大不同。

B.Bollobás, P. A. Caflin and P.Erdös在European J. Comb.Vol, No3,195-199(1980)中证明了"Had-

wiger 猜测几乎对每一个图都成立”。

8.3.1 证明：若G是单图，$G\neq K_1$，且至多有一个顶点的度小于3，则G包含K_4的重分。

证：由于$G\neq K_1$，且它至多有一个顶点的度小于3，故不失一般性，可假定G连通，否则考虑G的非平凡连通分支即可。其次由练习3.2.4知，可假定G是2-连通图，否则考虑仅包含G的一个割点又不含G中度小于3的顶点的那个块。设C为G中最长的圈，则$|V(C)|\geq 4$。事实上，若C是3-圈，如图(1)所示。由于G中至多一个顶点度小于3，故可假定$d_G(v_1)\geq 3$。所以存在$v_4\in V(G)\setminus V(C)$，由系3.2.2，在$G$中存在包含$v_1v_2$，$v_1v_4$的圈$C_1$。若$v_3\in C_1$，则$C_1$的长度大于3；若$v_3\notin C_1$，则$(C_1-v_1v_2)\cup\{v_2v_3, v_3v_1\}$是$G$中长度大于3的圈。不管哪种情况，均和$C$的取法矛盾，故$|V(C)|\geq 4$。



8.3.1 图

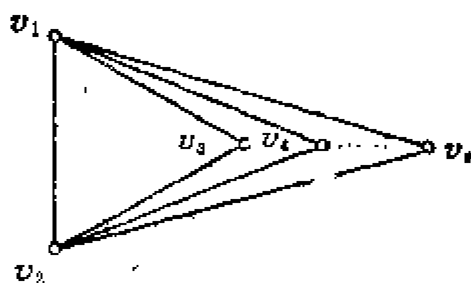
若　　C上依序存在如下相异的四个顶点u_1，u_2，u_3，u_4，满足在$G-C$中存在(u_1, u_3)-路R和(u_2, u_4)-路Q，则称R、Q为C上的**交叉路**。当C含有交叉路时，若R、Q相交于u_5，如图(2)，则$C\cup Q\cup R'$是G中的K_4重分，其中R'为R中(u_3, u_5)-段。若R、Q不相交，如图(3)，则$C\cup Q\cup R$是G中的K_4重分。故不失一般性。下面假定C上不含交叉路，显然$V(C)\neq V(G)$.不然按假定C上的顶点在G中的度$\geqslant 3$的顶点个数$\geqslant 3$，G又是单图，则易知C上一定出现交叉的边而矛盾。故下面可假设在$u_6\in V(G)\setminus V(C)$，如图(4)所示，其中$e$为$C$上之一边。于是由系3.2.2知，在$G$中恒有包含$e$和$u_6$的圈$C_1$。从$u_6$出发，沿$C_1$的两个方向前进，和$C$相遇的第一个交点，分别记为$u_1$、$u_3$。由于$C_1$中含$e$，故$u_1\neq u_3$，又由于$C$是最长之圈，故在$C$上$u_1$、$u_3$之间，还分别含有顶点$u_2$、$u_4$。于是$G$中必含有如图(5)所示的$\theta$图。由假定不失一般性可令$u_1\cdots u_2\cdots u_3$路$P$上的顶点的度均$\geqslant 3$。同样可证，假如$P\cup R$圈上含交叉路，或$P$和$R$的内点间有路相连时，$G$中总含有$K_4$重分。故下面可假定$P\cup R$圈上不含交叉路，且$P$和$R$的内点间不存在路相连，于是必然存在一点$u_7\in P$，它与$P\cup R$中的其它顶点均无路相连。由于$d_G(u_7)\geqslant 3$，故存在$u_8\in V(G)\setminus(P\cup R)$、$u_7u_8\in E(G)$，今由于$G$是2-连通的，所以$G-u_7$是连通的。于是在$G-u_7$中存在$(u_8, u_4)$-路$T$。从$u_7u_8$出发，沿$T$前进和$C$的第一个交点记为$u_9$，由上面的假定，$u_9$一定是$u_3\cdots u_4\cdots u_1$路的内点。记$Q'$为$T$中$(u_8, u_9)$-段$+u_7u_8$，于是$Q'$与$R$构成$C$上的交叉路，这与假设矛盾。综合上述，命题成立。

8.3.2 (a)证明：若 G 是单图，且 $\nu\geqslant4$，$\varepsilon\geqslant2\nu-2$，则 G包含 K_4 的重分。

(b)对于 $\nu\geqslant4$，找一个单图 G，$\varepsilon=2\nu-3$，但不包含K_4的重分。

证：(a) 用归纳法证明。对$\nu=4$，$\varepsilon\geqslant6$的单图G，仅能是 K_4，故 $\nu=4$ 时结论成立。设 $4\leqslant\nu<n$，且满足 $\varepsilon\geqslant2\nu-2$ 的一切单图中，均包含 K_4 的重分，现考虑 $\nu(G)=n$。若 G 不含度小于 3 之点，则由练习 8.3.1 知，G 中包含 K_4的重分。不然 G 中存在 v_0，$d_G(v_0)\leqslant2$，令 $G_1=G-v_0$，于是 $\nu(G_1)=n-1$，$\varepsilon(G_1)\geqslant2(\nu-1)-2$，由归纳法假设知，$G_1$ 中包含 K_4 的重分。从而 G 中包含 K_4 的重分。

(b)如图 G，因为 G 中若含 K_4 的重分，G 中必需至少有 4 个顶点，它们的度$\geqslant3$，但 G 中仅 v_1、v_2 的度$\geqslant3$，故G不可能包含 K_4 的重分，另一方面易证 $\varepsilon(G)=2\nu-3$。故 G 即为所求。



8.3.2 题图

8.4 色多项式

定义：如果 G 在两种 k-着色中，存在某些顶点着以不同的颜色，则认为这两种 k-着色是不同的。用 $\pi_k(G)$表示

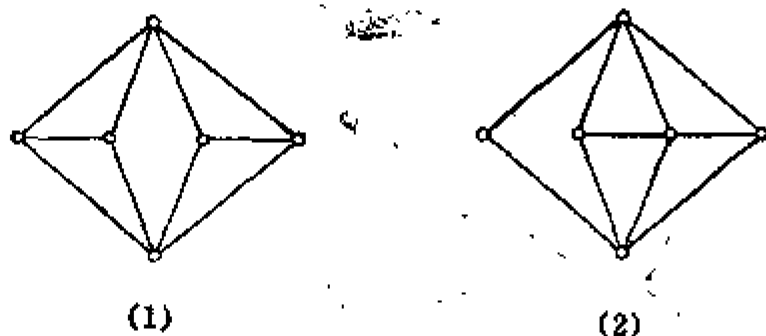
G 的不同 k-着色个数，称为 G 的**色多项式**。

定理8.6 若 G 是单图，$e\in E(G)$，则

$$\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e).$$

系8.6 对任何图 G，$\pi_k(G)$都是 k 的 ν 次整系数多项式，常数项为 0，且系数正负交错。

8.4.1 计算下列两图的色多项式



8.4.1 题 图

解：对图 (1)、(2) 计算前，先计算另外三个图的色多项式。下面我们沿用以图本身形象地代表它的色多项式的方法。由于环与重边对色多项式不产生影响，从而将它们从图中略去，一律用单图画出来。我们不妨先用练习 8.4.6 的结果来得到后面计算中要用到的 (1) 式。

(1) G = G − G

$$=(k-1)\pi_k(G)$$

(2) $=$ $-$

$=(k-1)$ $-$

$=(k-1)\left(\quad + \quad \right)-$

$=(k-2)$ $+(k-1)$

$=k(k-1)(k-2)^2(k-3)+k(k-1)^2(k-2)$

$=k(k-1)(k-2)(k^2-4k+5)$

(3) $=$ $-$

$= (k-2)$

$= k(k-1)(k-2)^2(k-3)$.

所以对图(1)

$= (k-2)$

$= k(k-1)(k-2)^2(k^2-4k+5)$
$\quad - k(k-1)(k-2)^2(k-3)$
$= k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$

对图(2)

$$= \quad = k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$$

8.4.2 (a) 借助于定理8.6，证明：若G是单图，则$\pi_k(G)$中$k^{\nu-1}$的系数为$-\varepsilon$。

(b)证明：$k^4-3k^3+3k^2$不是任何图的色多项式。

证：(a)用归纳法来证明。当$\varepsilon=1$时，直接计算$\pi_k(G_1)=k^\nu-k^{\nu-1}$，故$\varepsilon=1$时命题成立。设$\varepsilon<n$时的一切单图命题均成立。设$G_n$满足$\varepsilon(G_n)=n$，$e\in E(G_n)$，于是由定理8.6及系8.6有，$\pi_k(G_n)=\pi_k(G_n-e)-\pi_k(G_n\cdot e)$，显然$\varepsilon(G_n-e)=n-1$、$\varepsilon(G_n\cdot e)\leqslant n-1$、$\nu(G_n\cdot e)=\nu(G_n)-1$。故$\pi_k(G_n)=(k^\nu-(n-1)k^{\nu-1}+\cdots)-(k^{\nu-1}-\cdots)=k^\nu-nk^{\nu-1}+\cdots$。故由归纳法命题成立。

(b) 一个多项式，若是某个图的色多项式，那么也是该图对应的底图的色多项式。故我们仅需对单图来证明。若$k^4-3k^3+3k^2=\pi_k$是某个单图G的色多项式，则由(a)知，$\varepsilon(G)=3$，从而$\chi(G)\geqslant2$，另一方面$\pi_1=1$，这说明$\chi(G)\leqslant1$，矛盾。故π_k不可能是任何单图的色多项式。

还可以另法证明如下：

由(a)及系8.6知，若G存在，则$\varepsilon=3$，$\nu=4$。而$\nu=4$，$\varepsilon=3$的所有图的色多项式均不是$k^4-3k^3+k^2$，故G不存在。

8.4.3 (a)若 G 是树，则 $\pi_k(G)=k(k-1)^{\nu-1}$。

(b)若 G 连通，则 $\pi_k(G)\leqslant k(k-1)^{\nu-1}$，$k$=非负整数。且证明仅当 G 是树时等号成立。

证：(a)当 $\nu=1$ 时，$\pi_k(K_1)=k$，故命题成立。若 $\nu<m$ 时，命题均成立。设 G 是树，且 $\nu(G)=m$。由系2.2知，存在悬挂边 $e\in E(G)$，于是 $G-e$ 是孤立点加上顶点数为 $m-1$ 的树，$G\cdot e$ 是 $\nu(G\cdot e)=m-1$ 的树。由定理 8.6 及归纳法假设，$\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e)=k^2(k-1)^{m-2}-k(k-1)^{m-2}=k(k-1)^{m-1}$，故命题成立。

(b) 由定理8.6，$\pi_k(G-e)=\pi_k(G)+\pi_k(G\cdot e)$，因为 $\pi_k(G\cdot e)\geqslant 0$，所以 $\pi_k(G-e)\geqslant\pi_k(G)$。另一方面由于$G$连通，设 T 是 G 的生成树，逐次用上述导出的公式将余树 T 的边从 G 中除去，于是最后有 $\pi_k(G)\leqslant\pi_k(T)$，由 (a)，$\pi_k(T)=k(k-1)^{\nu-1}$，故 $\pi_k(G)\leqslant k(k-1)^{\nu-1}$。

若连通图 G 的$\pi_k(G)=k(k-1)^{\nu-1}$ 时，则由练习8.4.2 (a)知，$\varepsilon(G)=\nu-1$。于是由练习 2.1.5 知，G 是一棵树。

8.4.4 证明：若 G 是一个长度为 n 的圈，则 $\pi_k(G)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$。

证：对于 $n=3$时，$G=K_3$，$\pi_k(G)=\pi_k(K_3)=k(k-1)\cdot(k-2)=(k-1)^3+(-1)^3(k-1)$，命题成立。设当 $n<m$ 时命题成立。若 G 是 m-圈，于是 $G-e$是m个顶点的树，由练习8.4.3(a)，$\pi_k(G-e)=k(k-1)^{m-1}$。$G\cdot e$是$(m-1)$-圈。故由归纳法假设$\pi_k(G\cdot e)=(k-1)^{m-1}+(-1)^{m-1}(k-1)$。今由定理 8.6，$\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e)=k(k-1)^{m-1}-(k-1)^{m-1}-(-1)^{m-1}(k-1)=(k-1)^m+(-1)^m(k-1)$。故由归纳法知命题成立。

8.4.5 (a) 证明 $\pi_k(G\vee K_1)=k\pi_{k-1}(G)$。

(b) 利用(a)和练习 8.4.4 证明，若 G 是 n 条辐的轮，则 $\pi_k(G)=k(k-2)^n+(-1)^n k(k-2)$。

证：(a) K_1 共 k 种着色；由于 G 中的每一个顶点均和 K_1 相连，从而 K_1 取定色后，G 就不能再取这色了，此时 G 仅能着 $k-1$ 种颜色，故 $\pi_k(G\vee K_1)=k\pi_{k-1}(G)$ 成立。

(b) 显然由(a)及练习8.4.4，即有 $\pi_k(G)=k(k-2)^n+(-1)^n k(k-2)$。

8.4.6 设 G_1、G_2、…、G_ω 是 G 的 ω 个分支，则 $\pi_k(G)=\pi_k(G_1)\pi_k(G_2)\cdots\pi_k(G_\omega)$。

证：只需注意到 G_1、G_2、…、G_ω 均可用 k 色独立地进行着色，故命题成立。

8.4.7 证明：若 $G\cap H=R$ 是完全图，则 $\pi_k(G\cup H)\pi_k(G\cap H)=\pi_k(G)\pi_k(H)$。

证：显然若 $k<\chi(H)$，则 $\pi_k(H)=0$，$\pi_k(G\cup H)=0$，故所求等式恒成立。今假定 $k\geq\chi(H)$，对 G 的任一 k-着色，就确定 R 上的一个 k-着色。对于 H，在 R 已着色的情况下，令 $\pi_k'(H-R)$ 表示在 R 着色固定的情况下，H 的 k-着色的个数。由 R 是完全图，从而 $\pi_k'(H-R)$ 与 R 具体着何色无关，且因为 $\chi(H)\leq k$，故 $\pi_k'(H-R)>0$，于是我们有 $\pi_k(H)=\pi_k'(H-R)\pi_k(R)$，$\pi_k(G)\pi_k'(H-R)=\pi_k(G\cup H)$，由上面两式消去 $\pi_k'(H-R)$，得 $\pi_k(G)\pi_k(H)=\pi_k(G\cup H)\pi_k(R)=\pi_k(G\cup H)\pi_k(G\cap H)$。

8.4.8 证明 $\pi_k(G)$ 的实根不大于 $\nu-1$。(L.Lovász)

证：对 $V(G)$ 的任一独立集分划 P，显然不论 k 取任何值，按 P 用 k 色对 G 正常着色有 $k(k-1)\cdots(k-|P|+1)$ 种

着色方法。所以我们有 $\pi_k(G)=\sum k(k-1)\cdots(k-|P|+1)$，这里是对遍取 $V(G)$ 的所有相异的独立集分划 P 求和。由于 $|P|\leqslant v$，当实数 $k>v-1$ 时，$\pi_k(G)$ 中求和号下的每一项均大于 0，故 $\pi_k(G)>0$。所以 $\pi_k(G)$ 的实根不大于 $v-1$。

8.5 围长和色数

定理8.7 对任给的正整数 k，存在不含 K_3 的 k-色图。

8.5.1 设 G_3，G_4，…是由 Mycielski 构造方法及 $G_2=K_2$ 得到的图列，证明 G_k 是 k-临界图（$k=2$，3，…）。

证：由定理 8.7，G_3、G_4、…中的 G_k 是 k-色图，故剩下仅需证明 G_k 是临界图。用归纳法来证明。当 $k=2$、$G_2=K_2$，命题成立。若对 $k\geqslant 2$ 命题已成立，即 G_k 是 k-临界图。下面证明 G_{k+1} 是 $(k+1)$-临界图。按定义只要证明对任意的 $e\in E(G_{k+1})$，有 $\chi(G_{k+1}-e)\leqslant k$，这里仍沿用定理 8.7 的符号，由于 G_k 是 k-临界图，故对 $v_iv_j\in E(G_k)$ 恒可以将 $G_k-v_iv_j$ 用 1，2，…，$k-1$ 色正常着色，且显然 v_i，v_j 在着色中必定着以同色，否则 G_k 就存在 $(k-1)$-正常着色；这和 G_k 是 k-色图相矛盾。今用 $\mathscr{C}$ 记上述 $G_k-v_iv_j$ 的 $(k-1)$-正常着色，并假定 v_i，v_j 均着以 1 色。下面我们对 e 分三种情况讨论：(1) $e=u_iv_j$，在 $\mathscr{C}$ 的基础上，将 v_i 集成着 k 色，其余顶点着色不变，于是得到 G_k 的一个正常 k-着色 $\mathscr{C}'$，它仅在 v_i 处出现 k 色，在 v_i 的邻点中仅 v_j 着 1 色。在这着色的基础上，除 u_i 外，其余的 u_m 均与 v_m 着同色，而 u_i 着 1 色，将 v 着以 k 色；(2) 若 $e=v_iv_j$

$\in E(G_k)$，在$\mathscr{C}$基础上，在$G_k-v_iv_j$中着以1色的顶点v_m的对应点u_m以k色，其余的u_m着以和对应的v_m相同的颜色，v着以1色；(3)若$e=vu_i$，在$\mathscr{C}'$的基础上，令u_m和v_m均着以相同的颜色，v着以k色。显然上述(1)-(3)的着色是$G_{k+1}-e$的一个k-正常着色。故$\chi(G_{k+1}-e)\leqslant k$，$G_{k+1}$是$(k+1)$-临界图。由归纳法知，命题成立。

8.5.2 (a) 设G为围长不少于6的k-色图($k\geqslant 2$)，用下列方法构造一个新图H：取G的$\binom{kv}{v}$个不相交的拷贝，及kv个新顶点的点集S，在G的拷贝和S的v个元素的子集间建立1-1对应。对G中每一个拷贝的顶点与它相对应的S中的v个元素的子集中的顶点间用匹配相连。证明：H的色数最少为$k+1$，围长最少为6。

(b) 推导：对任何一个$k\geqslant 2$，都存在围长为6的k-色图。 (B. Descartes)

证：(a) 由假定G的任一个拷贝中均不可能含长度小于6的圈，又由H的定义，若H中的圈含S中的顶点，则这个圈至少要含两个S中的顶点u_1，u_2和不同的两个G的拷贝中的顶点，且在H中u_1、u_2间距离$\geqslant 3$。故含S中顶点的圈长度也是$\geqslant 6$。所以H的围长至少为6。

又由于S共有kv个顶点，故不论何种k-着色，总存在一个S中的v个顶点的子集S_1，S_1上的顶点均着以相同的颜色，不失一般性假定是着1色，按定义S_1应和G的某一个拷贝G_1对应，可是G_1是k-色图，不论何种k-正常着色，恒有顶点着1色，于是必然产生均着1色的相邻顶点，所以H不可能用k色进行正常着色，故$\chi(H)\geqslant k+1$。

注意：实际上，$\chi(H)=k+1$。这只要将G的拷贝正常

k-着色，S 中顶点全着 $k+1$ 色，它是 H 的正常(k……
色。

(b) $H_2=C_6$ 是围长为6的2-色图，用(a)中方法，构造出围长为6的3-色图 H_3，再用(a)中方法，由 H_3 可构造出围长为6的4-色图 H_4，如此继续下去递次用(a)中方法来构造图，$k-2$ 次后，得 H_k 图，显然 H_k 是围长为6的 k-色图。

8.6 存储问题

定义：用 v 简记指令"选择顶点 v"。若 x 和 y 是已知指令，则**逻辑和**是"x 或 y"，记为 $x+y$；**逻辑积**是"x 与 y"，记为 xy。

定义，图 G 的一个 k-着色 $\mathscr{C}=(V_1, V_2, \cdots, V_k)$，如果满足 V_i 是 $G-(V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_{i-1})$，$(i=1, 2, \cdots, k, V_0=\phi)$的极大独立集，则称 $\mathscr{C}$ 为**典型的k-着色**。

8.6.1 对逻辑和与逻辑积验证结合律、交换律、分配律和吸收律成立。

证：设 x、y、z 是已知指令。由定义有 $(x+y)+z=x+y+z$, $x+(y+z)=x+y+z$，从而$(x+y)+z=x+(y+z)$；同理有 $(xy)z=x(yz)$，故结合律成立。

因为指令"x与y"和指令"y与x"是一回事，故$xy=yx$；同理有 $x+y=y+x$。故交换律成立。

由于指令"x与(y或z)"相当于指令"(x与y)或(x与z)"，故有 $x(y+z)=xy+xz$。又利用交换律可得$(y+z)x=xy$

$+xz=yx+zx$。所以，分配律成立。

最后由指令"x 与 x"、"x 或 x"就是指令"选择 x"，可得 $xx=x$，$x+x=x$。从而 $x+xy=x(x+y)=x$，故吸收律成立。

8.6.2 将逻辑表达式

$(a+bd)(b+aceg)(c+bdef)(d+aceg)(e+bcdf)(f+ceg)(g+bdf)$

化简为：$aceg+bcdeg+bdef+bcdf$。

解：根据练习 8.6.1，

$$\text{原式}=(aceg+bd+ab)(aceg+bdef+cd)(ceg+bcdf+ef)(g+baf)=(aceg+bdef+bcd)(ceg+efg+bcdf+bdef)=aceg+bcdf+bdef+bcdeg.$$

8.6.3 证明：若 G 是 k-可着色，则 G 有典型的 k-着色。

证：对于 G 的某一 k-着色 $V=(V_1, V_2, \cdots, V_k)$，我们令 $S_0=\varnothing$，递推地构造 S_l，$(l=1, 2, \cdots, k)$如下：

$S_l=\{v_i \mid v_i\in V\setminus\bigcup_{r=1}^{l}V_r$；任两个 v_i 之间不相邻；v_i 与 $(V_l\setminus\bigcup_{r=0}^{l-1}S_r)$中顶点都不相邻。$\}$利用 S_l，再作新的顶点分划如下：

$V_l'=(V_l\setminus(\bigcup_{r=0}^{l-1}S_r))\cup S_l$，$(l=1, 2, \cdots, k)$。由 S_l 的构造法知，V_l' 是 $G-(V_1'\cup V_2'\cup\cdots\cup V'_{l-1})$的极大独立集，故着色$(V_1', V_2', \cdots, V_k')$是 G 的典型 k-着色。

第九章 平面图

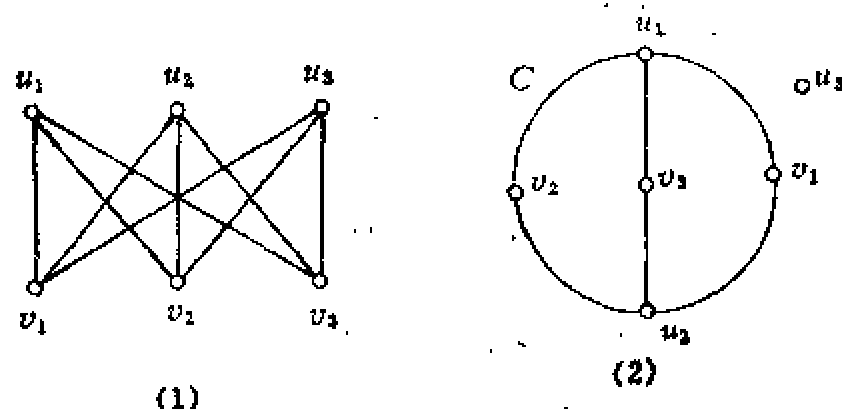
9.1 平面图和可平面图

定义：一个图G，如果可以将它画在平面上，使它的边仅在端点上才可能相交，则称图G为**可平面图**。图的这种平面上的画法称为图G的**平面嵌入**，或称为**平面图**。

定理9.1 K_5是非可平面图。

定理9.2 图G是平面可嵌入的充要条件是它是球面可嵌入的。

9.1.1 证明 $K_{3,3}$是非可平面图。



9.1.1 图

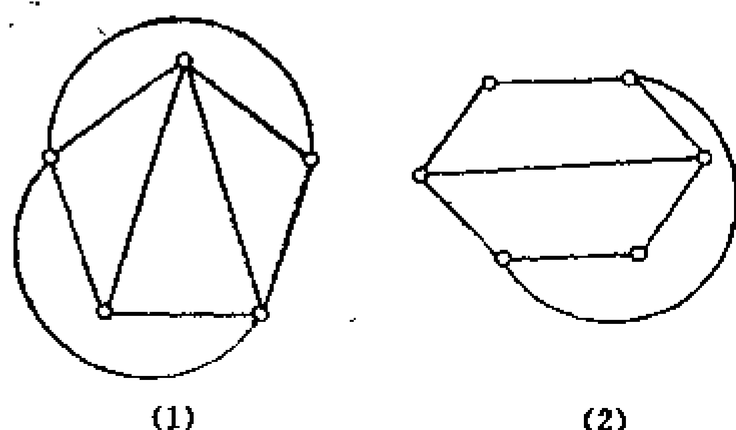
证，如图(1)所示，令C表示图(1)中$v_1u_1v_2u_2$这4-圈在

平面上的表示，如图(2)，显然C是平面上的一条Jordan曲线(这里指的就是点集拓扑学中的Jordan简单闭曲线)。设$v_3\in \text{int}C$，于是u_1v_3、u_2v_3连同C将平面分成三个两两不相交的区域，而u_3应落入这三个区域中的某一个区域，不失一般性，假定$u_3\in \text{ext}C$，则由Jordan定理知，u_3v_3的连线必须与C相交，故$K_{3,3}$是非可平面图。

9.1.2 (a) 证明：对K_5的任一边e，K_5-e是可平面图。

(b) 证明：对$K_{3,3}$的任一边e，$K_{3,3}-e$是可平面图。

证：由于K_5、$K_{3,3}$的对称性，仅需对它们的某一边e，分别验证K_5-e、$K_{3,3}-e$是可平面图即可。图(1)、(2)分别是它们对应的平面图，故结论成立。



(1)　　　　(2)

9.1.2 图

9.1.3 证明任意的图G均能嵌入R^3[注]。

[注] H. Vollmerhaus 1968年，证明了"对任意亏格的可定向曲面$\mathscr{F}$，均存在一类紧图不能嵌入$\mathscr{F}$"。

证：将图G中的顶点任意安排在曲线：$x=t$；$y=t^2$；$z=t^3$上的不同点，当v_1、v_2、v_3、v_4是任意四个相异的顶

点时，则对应的t_1、t_2、t_3、t_4两两不等。故Vandermonde行列式：

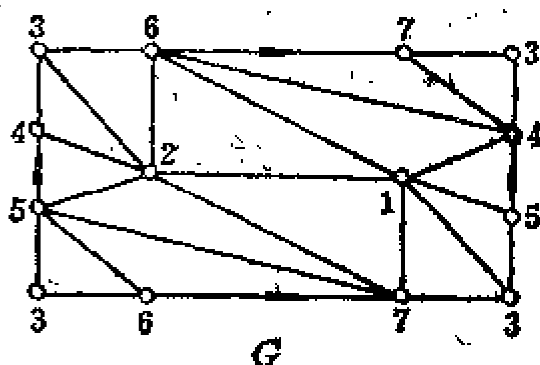
$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

由空间解析几何可知，v_1、v_2、v_3、v_4不共面，即图G的任意两边v_1v_2，v_3v_4在R^3中不相交。所以对任意图G均可以嵌入R^3中。

9.1.4 证明图G是K_7在环面上的嵌入。

（类似地$K_{4,4}$也能嵌入环面，可参看F.Harary著《图论》中图11.18。）

证：首先若将图中矩形打箭头的两对边两两重合，则矩形变成了一个环面，故右面带箭头的矩形是环面的平面展开。其次我们将图中顶点给以标号，易由顶点标号，验证它和K_7同构，故结论成立。



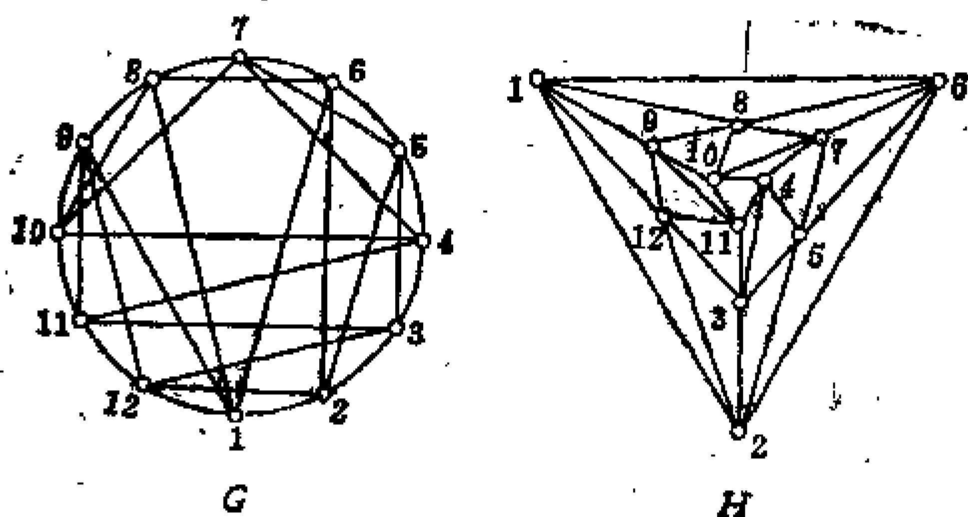
9.1.4 图

9.1.5 求图G的一个平面嵌入，并使得其中每一条边都

是直线。

(I.Fáry 1948年证明了每一个可平面化单图均有一个每条边都是直线的平面嵌入)

解：图H是G的平图图，它的每条边均为直线。



9.1.5 图

9.2 对 偶 图

定义：平面图G的对偶图G^*定义如下：G中每个面f内取一点作G^*的一个顶点f^*，G^*中f^*、g^*相连以边e^*的充要条件是f^*、g^*在G中对应的面f、g含公共边e，且使e和e^*相交。

易知G^*仍是平面图，且有$\nu(G^*)=\phi(G)$(G中的面数)；$\varepsilon(G^*)=\varepsilon(G)$；$d_{G^*}(f^*)=d_G(f)$($G$中和面$f$关联的边数)。

值得指出，这里的对偶定义，通常称为**几何对偶**。H.Whitney对图的几何对偶进行了抽象，给出了另一种对偶定义——**组合对偶**。读者可以从F.Harary著的《图论》中，或

从王朝瑞编的《图论》中找到它的定义。

定理9.3 设v是可平面图G上任一顶点，则存在一个平面嵌入使v落在这嵌入的外部面上。

定理9.4 若G是平面图，则$\sum_{f\in F} d(F)=2\varepsilon$。

9.2.1 (a) 证明图是可平面图的充要条件是它的每一块均是可平面的。

(b) 推导极小非可平面图(即其任意真子图均是可平面图的非可平面图)是一个单块。

证：(a)⇒，显然。

⇐，不失一般性，假定G连通。今对块数n用归纳法。$n=1$时由假设结论成立。假设对一切的$n<k$，G总是可平面的。下面考虑$n=k$的情况，设v是G的割点，故存在G_1, G_2，使$G=G_1\cup G_2$，$G_1\cap G_2=\{v\}$，显然G_1、G_2的块数均小于k，由归纳法设，G_1、G_2均是可平面图。再由定理9.3，将G_1、G_2分别不相交地嵌入到平面中，并使v均落入它们的平面嵌入的外部面上，然后我们将这两个v叠合在一起，便得到G的一个平面嵌入，故G是可平面的。

(b) 若G是极小非可平面图，显然由极小性G应是单图，又若G不是单块，于是G中存在割点，将G分解成G_1、G_2、…、G_r，r个块。由(a)知，这些块中必有非可平面块，但这样一来又和G是极小的相矛盾；故G一定是单块。

9.2.2 平面图若和它的对偶面同构，则称图为自对偶图。

(a) 证明：若G是自对偶的，则$\varepsilon=2\nu-2$。

(b) 对每一个$n\geqslant4$，求作一个n个顶点的自对偶平面图。

证：(*a*) 由于G是自对偶的，从而$\nu=\phi$。且由于G^*连通，知G连通。又注意到每去一非割边少一面，故去掉$\phi-1$条边后，G变成一棵生成树。由定理2.2，$\varepsilon-(\phi-1)=\nu-1$故$\varepsilon=2\nu-2$。

(*b*) 当$n\geqslant 4$，$n-1$条幅的轮W_{n-1}是一个自对偶平面图。

9.2.3 (*a*) 证明B是平面图G的键的充要条件是$\{e^*\in E(G^*)|\ e\in B\}$是$G^*$中的圈；

(*b*) 证明平面Euler图的对偶图是2-部图。

证：(*a*)⇒：对B的边数n进行归纳。当$n=1$时，在G^*中对应的是一个环。故结论成立。设$n<k$时结论成立。今考虑$n=k$的情况，设$e_1\in B$，于是$B-e_1$是$G-e_1=G_1$的一个键，由归纳法假设$\{e^*\in E(G_1^*)|\ e\in B-e_1\}=C_1^*$是$G_1^*$中的一个圈，且圈$C_1^*$上的顶点$f^*$对应于$G_1$中的面$f$，$f$的边界上有键$B-e_1$中的边。现将$e_1$加入$G_1$使恢复到$G$，由于$G$是平面图，其作用相当于圈$C_1^*$上的一个顶点$f^*$对应于$G_1$中的一个平面区域$f$；被$e_1$划分成两个以$e_1$为公共边的区域$f'$、$f''$；对应在$G_1{}^*$中，其作用相当于将顶点$f^*$分成两个顶点$f'^*$、$f''^*$，并在其间连以$e_1$所对应的边$e_1^*$。故$B$对应在$G^*$中的$\{e^*\in E(G^*)|\ e\in B\}$仍然是一个圈。由归纳法，命题成立。

⇐：G^*中的一个圈，对应于G中的边的集合B显然是G中的一个边割集，若它不是键，则由练习2.2.9知，它是G中键之和；由必要性知每一个键对应G^*中是一个圈，从而推出B在G^*中对应的边集是圈的和集，这和假设矛盾，故B是G中的键。

(*b*) 由于Euler图的任一边割集均含偶数条边，故在对

应的对偶图中，由(a)知，不含奇圈，故Euler 图的对偶图是2-部图。

9.2.4 设G是平面图，证明：

(a) $G^{**}\cong G$的充要条件是G是连通的；

(b) $\chi(G^{**})=\chi(G)$。

证：(a)⇒：因为G是平面图，从而G中之边和顶点将平面划分成内点不相交的闭区域(面)，显然这些面中的任意两面，均可通过一串依次之间有公共边的面相连，故G^*连通，从而G^{**}连通。由于$G^{**}\cong G$，所以G连通。

⇐：由对偶图定义知，平面图G与对偶图G^*嵌入在同一平面上，当G连通时，易知G^*的无界面f_∞^{**}中仅含G的唯一顶点v_∞；除顶点v_∞外，G中其它顶点v均与G^*中的有限面f^{**} 1-1对应，于是G中顶点和G^{**}中顶点在这自然对应方式下1-1对应，且对应顶点间的邻接关系保持不变。故$G^{**}\cong G$。

(b) 若G是含有G_1、G_2、…、G_k, k个分支的平面图。设$v_0^{(i)}$是G_i中的无界面的一个非割点的边界点，$i=1,2,\cdots,k$。今由G构作一个连通的平面嵌入图$\tilde{G}$如下：将$v_0^{(i)}$，$i=1,2,\cdots,k$，重合成$\tilde{G}$中的一个新顶点v_0，且使$\tilde{G}-v_0$含有k个连通分支C_i(也可能$C_i=\Phi$)，且$G_i\cong\tilde{G}[C_i\cup\{v_0\}]$($i=1,2,\cdots,k$)。又不妨假定$\chi(G_1)=\chi(G)$，于是显然有$\chi(\tilde{G})\geqslant\chi(G_1)=\chi(G)$，另一方面对每个$G_i$($i=1,2,\cdots,k$)用$\chi(G)$色进行正常着色，且使$v_0^{(i)}$均着以1色，在这着色基础上，我们将$G$变成$\tilde{G}$，并保持顶点在$G$中的原来着色，显然它也是$\tilde{G}$中的$\chi(G)$-正常着色，所以$\chi(\tilde{G})\leqslant\chi(G)$，故$\chi(\tilde{G})=\chi(G)$。易证$G^*\cong\tilde{G}^*$，从而由(a)有，$G^{**}\cong\tilde{G}^{**}\cong\tilde{G}$，所以$\chi(G^{**})=\chi(\tilde{G}^{**})=\chi(\tilde{G})=\chi(G)$。

9.2.5 设T是连通平面图G的生成树，$E^*=\{e^*\in E(G^*)|e\notin E(T)\}$。证明$T^*=G^*[E^*]$是$G^*$中的生成树。

证： 对$\phi(G)=1$，$G=T$，$E^*=\phi$，此时T^*是平凡图，结论成立。当$\phi(G)\geqslant 2$，由于G的每一个面含$e\notin E(T)$。即G^*中的每一个点均与E^*之边关联，即T^*是G^*中的一个生成子图。若T^*中含有G^*的圈，则由练习9.2.3知，T中含有G中的键，这和定理2.6矛盾，故T^*不含G^*中的圈。又对G，每去掉$E(T)$中的一条边，G就减少一个面。当$E(T)$中的边从G全部去除时，G变成一棵树T，从而有$\varepsilon(T^*)=\varepsilon(T)=\phi(G)-1=v(G^*)-1$。于是由练习2.1.5，$T^*$是$G^*$中的生成树。

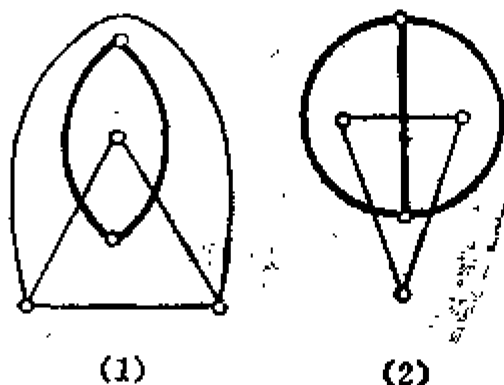
9.2.6 **平面三角剖分**是一个每个面度均为3的平面图。证明每个平面单图($v\geqslant 3$)，是某个平面三角剖分单图的生成子图。

证： 设G是一个平面单图($v\geqslant 3$)，在G上尽可能地增加新杆，扩充成边最多的平面单图，记为G_{max}。在G_{max}中若存在面f，$d_{G_{max}}(f)\geqslant 4$，若$f$的边界含有悬挂边$v_0v_1$，$d_{G_{max}}(v_0)=1$，将$v_0$和$f$的异于$v_1$的边界点在$f$中连以边$e$，显然$G_{max}+e$仍然是以$V(G)$为顶点集的平面单图，且它比$G_{max}$的边多，这与$G_{max}$的定义矛盾。故$f$的边界是圈$C$，设$C$为$v_1v_2\cdots v_k(k\geqslant 4)$，若在$G_{max}$中不含$v_1v_3$边，在$f$中连以$v_1v_3$边，并令它为$e'$；若$G_{max}$中含有$v_1v_3$边，它一定不在$f$内，我们再在$f$内，将$v_1$，$v_3$连以边，于是这$f$内外的两条$v_1v_3$边在平面上构成一条Jordan曲线$C$，$v_2\in \mathrm{int}C$，$v_4\in \mathrm{ext}C$，所以由Jordan曲线定理知，在$f$外$G_{max}$中不能含有$v_2v_4$边，此时我们在$f$中连以$v_2v_4$边，并令它为$e'$。故不论何种情况，恒存在$G_{max}+e'$，它仍然是以$V(G)$为顶点集的平面单图，

且它比G_{max}的边多，这又与G_{max}的定义矛盾。故G_{max}中的f的面度恒为3。所以G_{max}是一个平面三角剖分单图。显然按G_{max}的定义G是它的生成子图。

9.2.7 设G是$\nu \geqslant 4$的平面三角剖分单图，证明G^*是一个2-边连通3-正则的平面单图。

证： 由G^*定义，它是3-正则平面图。于是G^*若不是单图，只可能如图(1)、(2)所示的两种情况，其中粗边是G^*中的边，细边是G中的边。但图(1)与G是单图矛盾；图(2)推出$G \cong K_3$，与$\nu \geqslant 4$矛盾。故G^*不含重边。又因G是三角剖分图，故G不含环和割边，否则无界面的面度大于3。所以G^*也不含环和割边，故G^*是2-边连通的单图。



9.2.7 图

9.2.8 证明任一平面三角剖分G包含一个具有$2\varepsilon(G)/3$条边的2-部子图。 (F.Harary, D.Matula)

证： 类似于练习9.2.7的证明，G^*是2-边连通3-正则的图，于是由系5.4知，在G^*中存在一个完美匹配$M^* \subset G^*$。由于G是三角剖分图，故G连通，于是由练习9.2.4(a)，$G^{**} \cong G$，考虑$G_1 = (G^* - M^*)^*$，从而G_1同构于G的一个子图。首先由对偶图定义有$\varepsilon(G_1) = \varepsilon(G^* - M^*) = 2\varepsilon(G^*)/3 = 2\varepsilon(G)/3$，其次$G^*$中除去$M^*$的边，相当于除去$G$中的对应的一对相邻三角形面的公共边界，于是$(G^* - M^*)^* = G_1$中的面均为四边形面。故$G_1$不含奇圈，所以$G_1$是2-部图。故命题成立。

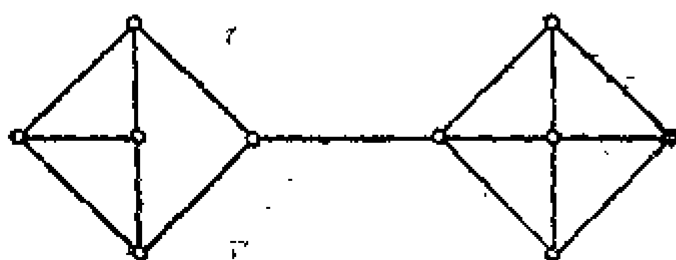
9.2.9 若平面单图G，在不相邻的顶点间，增加任何新边，均破坏G的平面性时，则称G是极大平面图。证明平面单图G是极大平面图的充要条件为G是三角剖分的。

证：$\Rightarrow$：若G含有面度大于3的面，像9.2.6题中证明的那样，可在这面的边界上某两个不相邻顶点间连以新边，而不破坏G的平面性，和单图性矛盾。故G是三角剖分的。

$\Leftarrow$：若G不是极大平面图，则G中存在两个不相邻的顶点在一个面内连以边，但这对三角形面来说是不可能的。故G是极大平面图。

9.2.10 试举例说明下述命题"平面图G有度为1的顶点，则其对偶图G^*含有环；若G有度为2的顶点，则G^*含有二重边。"的逆命题不真。

证：其例如图，它的对偶图既含环又含重边。



9.2.10 图

9.2.11 证明不存在这样的平面图，它有5个面，且任二面间均至少有一条公共边。

证：用反证法，考虑它的对偶图G^*，于是有$\nu^*=5$，且G^*中任二顶点间均有边相连，故$G^*\supseteq K_5$，从而G^*是非可平面图。但这与平面图的对偶图是平面图的性质矛盾。故结论成立。

9.3 Euler公式

定理9.5 (Euler公式) 若G是连通平面图，则$\nu-\varepsilon+\phi=2$。(推广的Euler公式为$\nu-\varepsilon+\phi=\omega+1$。)

系9.5.1 连通可平面图的所有平面嵌入，具有相同的面数。

系9.5.2 若G是可平面单图，且$\nu\geqslant3$，则$\varepsilon\leqslant3\nu-6$。

系9.5.3 若G是可平面单图，则$\delta\leqslant5$。

系9.5.4 K_5是非可平面图。

系9.5.5 $K_{3,3}$是非可平面图。

9.3.1 (*a*) 证明若G是围长为$k\geqslant3$的连通可平面图，则$\varepsilon\leqslant k(\nu-2)/(k-2)$。

(*b*) 利用(*a*)证明Petersen图是非可平面图。

证： (*a*)由于G的围长为k，故$d_G(f)\geqslant k$，$2\varepsilon=\sum_{f\in F}d_G(f)\geqslant k\phi$，将它代入Euler公式，化简即得$\varepsilon\leqslant k(\nu-2)/(k-2)$。

(*b*) Petersen图的围长为5，$\nu=10$，$\varepsilon=15$，它不满足(*a*)，故Petersen图是非可平面图。

9.3.2 证明每个可平面图是6-可着色图。

证： 对ν进行归纳，$\nu\leqslant6$，命题显然成立。设$\nu\leqslant k$命题均成立。现考虑$k+1$个顶点的可平面图G，由系9.5.3知，G中存在v_0，$d_G(v_0)\leqslant5$。考虑$G_1=G-v_0$，显然G_1仍是可平面图，且$\nu(G_1)=k$，由归纳法假设，对G_1可进行6-正常着色。由于$d_G(v_0)\leqslant5$，故v_0在G中的邻点在上述着色中至少有一种颜色，设为1色，不出现。将v_0着以1色，于是在G_1的

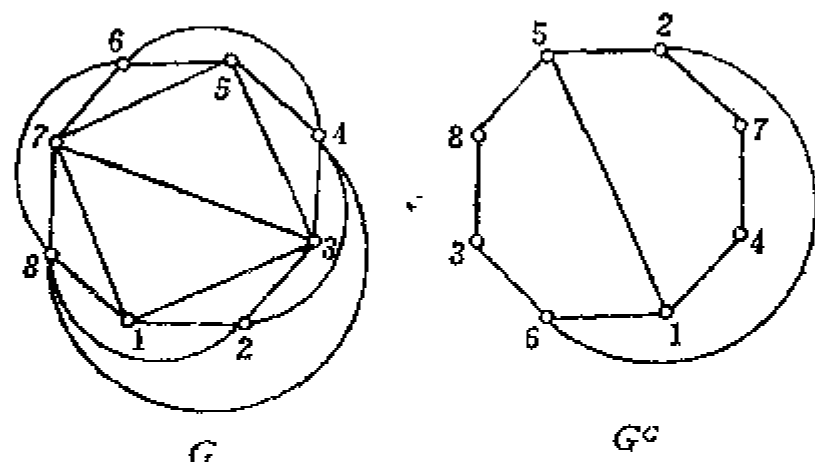
6-正常着色基础上，得到G的6-正常着色。由归纳法，命题成立。

9.3.3 (a) 证明若G是$\nu\geqslant 11$[注]的可平面单图，则G^c是非可平面的。

(b) 找一个$\nu=8$的可平面单图G，G^c也是可平面的。

证：(a) 由系 9.5.2 知，$\varepsilon(G)\leqslant 3\nu(G)-6$。又$\varepsilon(G)+\varepsilon(G^c)=\nu(\nu-1)/2$。所以$\varepsilon(G^c)\geqslant(\nu^2-7\nu+12)/2$，故当$\nu\geqslant 11$时，$\varepsilon(G^c)<3\nu(G)-6=3\nu(G^c)-6$。再由系 9.5.2 知，$G^c$是非可平面图。

(b) 其例如图：



9.3.3 (b) 图

[注] W.T.Tutte 于 Canad. Math.Bull.6(1973)，证明"$\nu\geqslant 9$"本命题也成立。

9.3.4 图G分解成可平面图的最少个数称为G的**厚度**$\theta(G)$。(于是$\theta(G)=1$的充要条件是G是可平面的。)

(a) 若G是单图，证明：$\theta(G)\geqslant\{\varepsilon/(3\nu-6)\}$，$\nu\neq 2$。

(b) 推导：$\theta(K_\nu)\geqslant\{\nu(\nu-1)/6(\nu-2)\}$，$\nu\neq 2$，并利用练

习9.3.3(b)证明：当$3\leqslant\nu\leqslant 8$时，上述等式成立。

证：(a) 当$\nu=1$时，$\theta(G)=1$，结论成立。当$\nu\geqslant 3$时，设$E(G)=E(G_1)\cup\cdots\cup E(G_{\theta(G)})$，其中$G_i$均为可平面单图，由系9.5.2知，$\varepsilon_i=\varepsilon(G_i)\leqslant 3\nu-6$，于是$\varepsilon_i/(3\nu-6)\leqslant 1$。又$\varepsilon=\varepsilon(G)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_\theta$，故$\varepsilon/(3\nu-6)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_\theta)/(3\nu-6)\leqslant\theta(G)$，由于$\theta(G)$是整数，所以

$\theta(G)\geqslant\{\varepsilon/(3\nu-6)\}$。

(b) 因为$\varepsilon(K_\nu)=\nu(\nu-1)/2$，代入(1)中公式得$\theta(G)\geqslant\{\nu(\nu-1)/6(\nu-1)\}$，当$\nu=3$，4时，$\theta(K_\nu)=1$，而$\nu(\nu-1)/6(\nu-2)=1$，故上述不等式中等号成立。当$5\leqslant\nu\leqslant 8$，由系9.5.4及练习9.3.3(2)知，$\theta(K_\nu)=2$，而$\{\nu(\nu-1)/6(\nu-2)\}=2$，故上述不等式中等号仍成立。

9.3.5 利用练习9.2.5的结果推导Euler公式。

证：设G是连通平面图，由练习9.2.5知，若T是G中的生成树，则$T^*=G^*[E^*]$，$E^*=\{e^*\in E(G^*)\mid e\notin E(T)\}$是$G^*$的生成树，故由定理2.2，$\varepsilon(T)=\nu-1$，$\varepsilon(T^*)=\phi-1$。又因$\varepsilon(T)+\varepsilon(T^*)=\varepsilon(T)+\varepsilon(\overline{T})=\varepsilon(G)$，所以有$\nu+\phi-2=\varepsilon$。即$\nu-\varepsilon+\phi=2$。

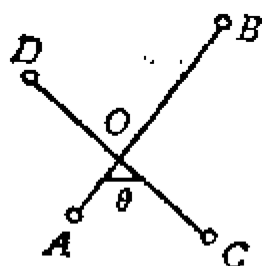
9.3.6 设G是一个平面三角剖分，则$\varepsilon=3\nu-6$。

证，因为G是一个平面三角剖分，故G连通且$3\phi=2\varepsilon$。将它代入Euler公式化简得$\varepsilon=3\nu-6$。

9.3.7 设$S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$n\geqslant 3$，是平面上的一个点集，它的任意两点间的距离至少为1。证明最多有$3n-6$个点对，它们之间的距离为1。

证：以S为顶点集构造一个单图G，x_i、x_j在G中相连以边的充要条件是x_i、x_j之间的距离为1。

下面证明G可以是每边均是直线的平面图。事实上，若G中存在AB、CD两边相交于O时，如图所示，由于$|AB|=1$，$|CD|=1$，故不失一般性，可假定：$|OA|\leqslant 1/2$；$|OC|\leqslant 1/2$。



9.3.7 图

于是由余弦定理有，$|AC|=(|OA|^2+|OC|^2-2|OA||OC|\cos\theta)^{1/2}$，当$\theta=\pi$时，显然$|OA|=1/2$，$|OC|=1/2$不能同时成立，否则$A$和$D$，$B$和$C$相重合，这与它们是两条不同边相矛盾。故有$|AC|<1$，但这又和$S$的假设相矛盾。故$G$是平面单图。于是由系9.5.2知$\varepsilon(G)\leqslant 3n-6$，按$G$的边的定义知，结论成立。

9.3.8 对任何K_ν，都有$\theta(K_\nu)\geqslant[(\nu+7)/6]$。(实际上，已证明，除$\nu=9$，10时$\theta(K_9)=\theta(K_{10})=3$外，对一切$\nu$，等号均成立。)

证：对$\nu\leqslant 5$，易直接验证，等号成立。对$\nu\geqslant 6$，由练习9.3.4(b)有，$\theta(K_\nu)\geqslant\{\nu(\nu-1)/6(\nu-2)\}$。由于有$\{x\}\geqslant[x+\delta]$，$0<\delta<1$，于是取$\delta=1-1/(3\nu-6)$代入得$\theta(K_\nu)\geqslant[\nu(\nu-1)/6(\nu-2)+1-1/(3\nu-6)]=[(\nu+7)/6]$。

9.3.9 G是平面单图，证明：

(a) 若$\nu(G)\geqslant 4$，则至少有4个顶点的度不大于5。

(b) 若$\delta(G)=5$，则$\nu(G)\geqslant 12$，试构造一个$\nu=12$的5-连通的平面单图。

(c) $K(G)\leqslant 5$(即，不存在6-连通的平面单图)。

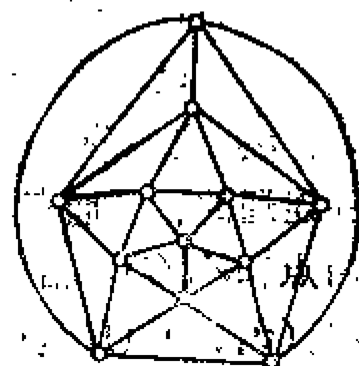
证：(a) 若$\nu\leqslant 6$，结论显然。对$\nu>6$，若$\delta(G)=1$，设$d_G(v_0)=1$，考虑$G_1=G-v_0$，显然若G_1结论成立，则G亦成立。故下面总假定$\delta(G)\geqslant 2$来证明结论。用反证法，若G

的度不大于5的顶点不多于3个。当$\delta(G)=2$时，有$2\varepsilon=\sum\limits_{v\in V}d_G(v)\geqslant 2\times3+6(\nu-3)=6\nu-12$，即$\varepsilon\geqslant3\nu-6$。另一方面，由系9.5.2，故$\varepsilon=3\nu-6$，且$G$是极大平面图。再由练习9.2.9知，$G$是一个平面三角剖分。由于$\delta(G)=2$，$G$包含练习9.2.7中图(1)作为它的子图。这与$G$是单图相矛盾。当$\delta(G)\geqslant3$时，有$2\varepsilon=\sum\limits_{v\in V}d_G(v)\geqslant3\times3+6(\nu-3)=6\nu-9$。这与系9.5.2相矛盾。故(a)成立。

(b) 设G中度为5的顶点个数记为k，于是有：

$2\varepsilon=\sum\limits_{v\in V}d_G(v)\geqslant5k+6(\nu-k)=6\nu-k$，再由系9.5.2，有：$6\nu-12\geqslant6\nu-k$，即$k\geqslant12$，故$\nu(G)\geqslant12$。

对5-连通图，显然有$\delta\geqslant5$，故$\nu=12$的这种图是它的一张点数最少的图。现构造如图。



9.3.9(b)图

(c) 反证法，若存在平面单图G，$\kappa(G)\geqslant6$，显然$\delta(G)\geqslant6$。于是有$2\varepsilon=\sum\limits_{v\in V}d_G(v)\geqslant6\nu$，这与系9.5.2相矛盾。故(c)成立。

9.4 桥

定义：设H是图G的子图，e_1，$e_2\in E(G)\setminus E(H)$，若存在一条途径$W$，使得(i)$W$的首尾两条边分别是$e_1$，$e_2$；(ii)$W$的内点和$V(H)$不相交，则说$e_1\sim e_2$。易证$\sim$是$E(G)\setminus E(H)$上的一个等价关系，在$\sim$下的每个等价类的诱导子图

称G中H的桥。设B是G中H的一个桥，记$V(B,H)=V(B)\cap V(H)$称为桥B对H的**接触顶点**。本节假定H是一个圈C，且将"C的桥"简称为"桥"。

定义：有k个接触顶点的桥称为k-桥，k-桥B的接触顶点将C分成无公共边的路的分划，这些路称为B的**段**。如果一个桥的所有接触顶点都位于另一个桥的同一段中，则称这两桥为**相互回避的**，否则称为**交叉的**。

定理9.8 内(外)桥是相互回避的。

9.4.1 证明：若B和B'是两个不同的桥，则

$V(B)\cap V(B')\subseteq V(C)$。

证：用反证法，若存在$v\in V(B)\cap V(B')$，$v\notin V(C)$。考虑v_1、v_2，它们分别是B、B'中任意一个顶点，由于B、B'是分别连通的，从而存在$W_1(v_1,v)$，$W_2(v,v_2)$途径，它们的内点和$V(C)$不相交。于是得到了一个新途径$W(v_1,v_2)=W_1(v_1,v)\cup W_2(v,v_2)$它的内点同样与$V(C)$不相交，故$v_1$、$v_2$应属于同一个桥，即$B=B'$，这与假设矛盾。所以$V(B)\cap V(B')\subseteq V(C)$。

9.4.2 设u、x、v和y是平面图中桥B对圈C的依次的四个不同的接触顶点。证明在B中存在(u,v)-路P和(x,y)-路Q，使得(i)P、Q的内点都和C不相交；(ii)$|V(P)\cap V(Q)|\geqslant 1$。

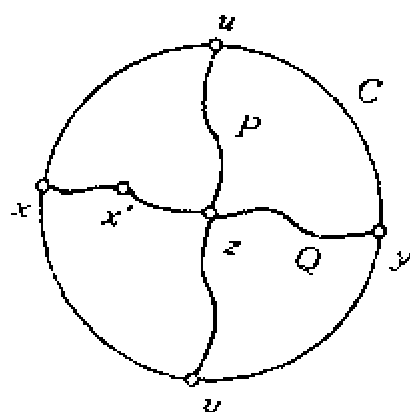
证：不失一般性假定B是内桥，于是B整个在C内部，见图。由B的定义知，在B中存在$W(u,v)$-途径它的内点和C不相交，对$W(u,v)$-途径，由练习1.6.1，知在$W(u,v)$-途径中包含一个$P(u,v)$-路，显然$P(u,v)$-路的内点和C不相交，类似地知在B中存在$Q(x,y)$-路，它的内点和C不相交，

故(i)成立。下面考虑$P\cup\{u\cdots x\cdots v$在C上的一段路$\}$，它是一条Jordan曲线记为C'，由于Q除端点外在C内部，若将Q看成一条连续曲线时，必存在一个点(它不一定是G的顶点)$x'\in \mathrm{int}C'$，而$y\in \mathrm{ext}C'$，从而由Jordan曲线定理P和Q相交，由于G是平面图，故其交点必须是G中的顶点，所以$|V(P)\cap V(Q)|\geqslant 1$。即(ii)成立。

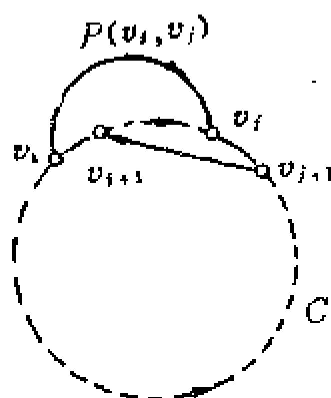
9.4.3 (a)令$C=v_1v_2\cdots v_nv_1$是非Hamilton连通图中最长的圈。证明(i)存在桥B，使得$V(B)\setminus V(C)\neq \Phi$；(ii)$v_i$、$v_j$是$B$的接触点，则$v_{i+1}v_{j+1}\notin E$。

(b) 推导：若$\alpha\leqslant \kappa$，则G是Hamilton的。

(V.Chvátal和P.Erdös)



9.4.2 图



9.4.3 (a) 图

证：(a) 由于G是非Hamilton图，从而存在$v_0\notin V(C)$，设含v_0之桥记为B，则B即为(i)中所求之桥。又设v_i、v_j是B在C上的接触点，见图。按桥的定义，在B中存在途径$W(v_i, v_0)$、$W(v_0, v_j)$，再由练习1.6.1结论，在B中存在长度大于1的$P(v_i, v_j)$-路，由C是G中的最长圈，故$|i-j|>1$，否则用$P(v_i, v_j)$-路代替v_iv_j边，得比C更长的圈。令

若$v_{i+1}v_{j+1}\in E$，则在G中存在圈C'，如图中箭头所示之圈，其长度大于C，矛盾。故$v_{i+1}v_{j+1}\notin E$，(ii)成立。

(*b*) 若G是非Hamilton图，设$C=v_1v_2\cdots v_nv_1$是G中的最长圈，且存在$v_0\notin V(C)$，令B是含v_0的C的桥。由(*a*)知，B的任意两接触顶点均不相邻，所以在C上存在不是B的接触顶点v'，由Menger定理，v_0，v'之间至少存在κ条内点不相交的路相连，若B在C上的接触顶点个数$<\kappa$，则存在不经过B的接触顶点由v_0到达v'的路，但这样一来v'成了B在C上的接触顶点，矛盾。故B的接触顶点之个数$\geqslant\kappa$。下面又由(*a*)(ii)知，若v_{i_1}、$v_{i_2}\cdots$、v_{i_κ}是B在C中的接触顶点，则v_{i_1+1}、v_{i_2+1}、$\cdots$、$v_{i_\kappa+1}$及v_0在G中两两互不相邻，故$\alpha(G)\geqslant\kappa+1$，但这又和$\alpha\leqslant\kappa$的假定相矛盾。从而$G$是Hamilton图。

9.5 Kuratowski定理

定理9.10 (Kuratowski定理) 一个图是可平面图的充要条件是它不含有K_5或$K_{3,3}$的重分。(或一个图是可平面图的充要条件是它经收缩变换后不含子图K_5或$K_{3,3}$。)

引理9.10.1 若G是非可平面图，则G的任一重分也是非可平面图。

引理9.10.2 若G是可平面图，则G的任一个子图均是可平面图。

一个图的可平面性判定，除了上述定理9.10外，还有如下充要条件，虽然它们均是等价的，但在算法上，后者较优。

(1) 一个图是可平面图的充要条件是它有一个组合对偶。 (H.Whitney.Fund.Math.21(1933))

(2) 一个图是可平面图的充要条件是它的每一个非平凡块有一个圈基C_1, C_2, …, C_m和C_0(对应于块的无界面的边界), 其中$m=e-v+\omega$, 使得块中每边恰含于这$m+1$个圈的二个圈中。 (S.Maclane, Duke Math.J.3(1973))

(3) 一个图是可平面图的充要条件是$\Phi^2(G)=0$。

(吴文俊, 科学通报2(1974))

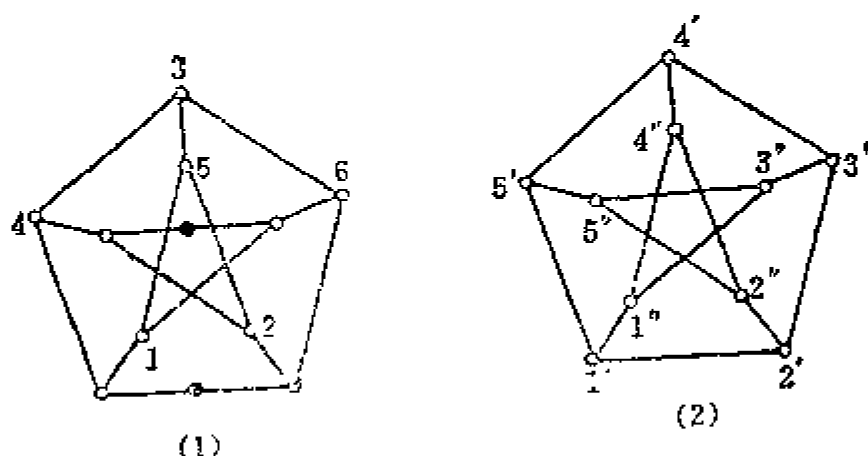
9.5.1 证明引理9.10.1和引理9.10.2。

证: 由于重分的结果是在G中增加一些度为2的新顶点, 而原来的顶点的度不变, 显然若G的重分能嵌入平面时, 则我们把这些新顶点对应在平面嵌入中的点抹去并连成一边, 最后所得的平面图就是G的平面嵌入, 这和G是非可平面图矛盾。所以G的重分一定是非可平面图。故引理9.10.1成立。

设G是可平面的, $\tilde{G}$是它的平面嵌入, 显然G的子图G_1对应在$\tilde{G}$中的子图$\tilde{G}_1$是G_1的平面嵌入, 故G_1是可平面图, 引理9.10.2成立。

9.5.2 用Kuratowski定理证明Petersen图是非可平面的。

证法1: 从Petersen图(1)中, 除去图中带点的边, 如图所示, {1, 2, 3}, {4, 5, 6}分别作为$K_{3,3}$的顶点的两部, 其余的顶点作为$K_{3,3}$的重分点。所以Petersen图中含有$K_{3,3}$重分, 由Kuratowski定理, Petersen图是非可平面的。



9.5.4 图

证法2：分别把Petersen图(2)中的i'和i''($i=1,2,\cdots,5$)的两点，收缩成一个顶点i，最后成为K_5。故由Kuratowski定理知，Petersen图是非可平面的。

9.6 5-色定理和4-色猜测

定理9.11 可平面图是5-可着色的。

4-色猜测(4CC)：可平面图是4-可着色的（本猜测自1879年A.B.Kempe给出第一个错误的证明起，一个多世纪来已多次被"证明"其中包括1976年由K.Appel,W.Hahen和J.Koch借助计算机得到的"证明"，至今猜测未被解决）。

定理9.12 下列命题是等价的：

(i) 可平面图是4-可着色的。

(ii) 平面图是4-面可着色的。

(iii) 任一2-边连通，3-正则可平面单图是3-边可着色的。

9.6.1 证明 无割边的平面连通图G是2-面可着色的充要条件是G是Euler图。

证：⇒：考虑G中任一顶点v，若$d_G(v)=k$，当k为奇数时，因G无割边，则围绕v的是k(奇数)个区域，它不可能2-面正常着色，故$d_G(v)$必为偶数。又因G连通，于是由定理4.1，G是Euler图。

⇐：若G是平面Euler图，显然G无割边且连通，由练习9.2.3(b)，G^*是2-部图，故G^*是2-可着色的，再由$\chi^*(G)=\chi(G^*)$，G是2-面可着色的。

9.6.2 证明 平面三角剖分G是3-可着色的充要条件是G是Euler图。

证：⇒：由于G是平面的三角剖分，从而G连通，不然无界面不是三角形，导致矛盾。设$v\in V(G)$，$d_G(v)$为奇数，则v的邻点在G中的导出子图是奇圈C，$C\vee\{v\}$这奇轮显然不可能3-正常着色，从而G也不可能3-正常着色，这和假设矛盾，故$d_G(v)$为偶数。于是由定理4.1知，G是Euler图。

⇐：由于G是Euler图，故由练习9.6.1知，G是2-面可着色的，若G的面用红、蓝色已正常着色，今给G以定向，使每边的定向保持红面在右侧。令C是G的任一圈，和C内的红面相关联的C上之边数为α，$\beta=\varepsilon(C)-\alpha$。又$k$和$l$分别是$C$内的着红、蓝色的面数，于是$C$上加$C$内的边数为$3k+\beta$或$3l+\alpha$。故$\alpha-\beta=3k-3l\equiv 0(\bmod 3)$。若对$G$的定向中的每一弧$(x, y)$均赋以权1，则$G$中任一圈$C$的权和为$\alpha-\beta\equiv 0(\bmod 3)$。下面对$G$中闭途径的长度$L$归纳地证明$G$中任一闭途径$W_L$的权和$\equiv(\bmod 3)$。当$L=$

3 时，$W_3=C_3$，故结论成立。对 W_L 是圈的情况上面也已证明。若 W_L 不是圈，则在 W_L 中存在 v_0，W_L 至少经过 v_0 两次，由 v_0 处可将 W_L 分解成长度比 W_L 短的 W'，W'' 两个闭途径，由归纳法假设，对 W'，W'' 的权和 $\equiv 0 \pmod 3$，所以 W_L 的权和 $\equiv 0 \pmod 3$。今设 P_1、P_2 是 G 中的任意两条 (x, y)-途径，则 $P_1 \cup P_2$ 是 G 中的闭途径，故 $P_1 \cup P_2$ 的权和 $\equiv 0 \pmod 3$，即 x，y 两顶点间的任一途径的权和 $\pmod 3$ 与途径的选取无关。现定义 $V(G)$ 上的函数 $f(v)$ 如下：任取 G 中一点 v_0，令 $f(v_0) \equiv 0 \pmod 3$，对 G 中任一点 v，由于 G 是三角剖分的，从而 G 连通，故在 G 中存在 (v_0, v)-途径，定义 $f(v) \equiv (v_0, v)$-途径的权和 $\pmod 3$，于是对 G 的定向的每一弧 (x, y)，有 $f(y)-f(x) \equiv 1 \pmod 3$。若将模 3 剩余类看成三种颜色，于是 $f(v)$ 就是 G 上的一种 3-正常着色，故 G 是 3-可着色的。

9.6.3 证明每一 Hamilton 平面图总是 4-面可着色的。

证：设 G 是一个具有 Hamilton 圈 H 的平面图。H 连同 H 内的边在 G 中的边导出子图记为 G_1，显然 G_1 仍是平面图，由系 1.1 知 G_1 中度为奇数的顶点个数为偶数，故我们可以在 H 上依次将 G_1 中度为奇数的顶点两两在 H 外连以边，并保持其平面性。最后所得之图记为 G_2，于是 G_2 的顶点度均为偶数，由定理 4.1 知，G_2 是 Euler 图，于是又由练习 9.6.1 知 G_2 是 2-面可着色的，故特别对 G 中 H 内部的面是 2-面可着色的。类似可证 G 中 H 外部的面也是 2-面可着色的。故 G 是 4-面可着色的。

9.6.4 证明 Hamilton 3-正则图恒有 Tait 着色法(即

3-正则图的正常3-边着色法)。

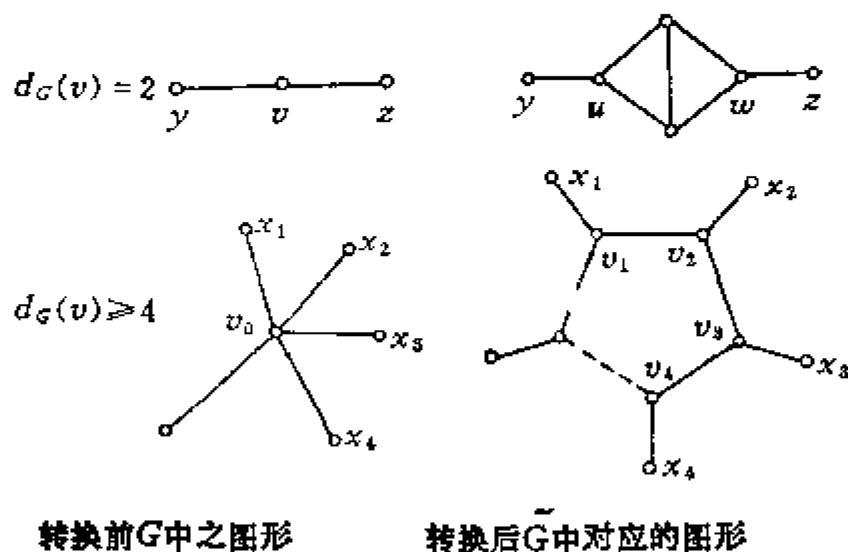
证：设 G 是 Hamilton 3-正则图，则 $3\nu=2\varepsilon$，故 ν 为偶数。从而 G 中的 Hamilton 而 H 中的边可 2-边正常着色。由于 G 是 3-正则的，故 $G-H$ 是 G 中的完美匹配，将它着以第 3 色，最后得到的 G 的边着色法，显然是一种Tait着色法。

9.6.5 依(iii) ⇒ (ii) ⇒ (i) ⇒ (iii) 的顺序来证明定理9.12。

证：(iii)⇒(ii)：首先证明命题：任意平面图是4-面可着色的充要条件是任意的 2-边连通 3-正则的平面单图是 4-面可着色的。命题的必要性是显然的。命题的充分性证明如下：若平面图 G 不连通或含有割边，则可分别考虑 G 的分支或 G 的块，对它们进行面正常着色，并每次使无界面着同一色，于是合并起来，就成 G 之面正常着色。若 G 的每一分支或块均是4-面可着色，则显然 G 亦是 4-面可着色。又显然 G 的底图是4-面可着色的，则 G 一定是4-面可着色的。故不失一般性，可假定 G 是2-边连通的平面单图。此时若 G 不是 3-正则图，我们可由 G 构作一个新图 $\tilde{G}$。其方法是将 G 中度为 2，和度大于等于 4 的顶点，转换成如图所示的图形。

显然 $\tilde{G}$ 是2-边连通3-正则平面单图，故 $\tilde{G}$ 是 4-面可着色的，于是 G 也是4-面可着色的。所以命题成立。

在上述命题基础上，(iii)⇒(ii)等价于由(iii)证明 2-边连通 3-正则平面单图 G 是 4-面可着色的。由(iii)知，G 是 3-边可着色的，即 G 存在 Tait 着色法。设对应的边的色分划为$\{E_1, E_2, E_3\}$，于是 $E_1\cup E_2$，$E_1\cup E_3$ 对应的导出



转换前G中之图形　　　转换后$\tilde{G}$中对应的图形

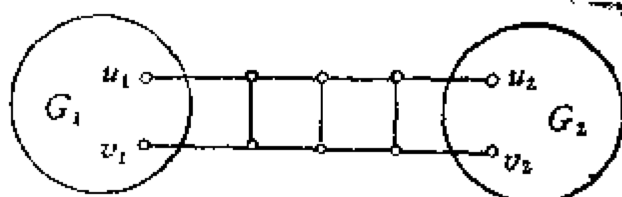
9.6.5 图

子图 G_{12}，G_{13}将分别是由两两不相交的圈的并组成，故它们分别是2-面可着色的。设G_{12}用向量(1, 0)，(2, 0)表示的颜色进行了正常着色，G_{13}用向量(0, 1)、(0, 2)表示的颜色进行了正常着色。由于$G=G_{12}\cup G_{13}$。G的每一个面均是G_{12}、G_{13}面的交，我们用对应的色向量和表示交面着的颜色。显然交面的着色共有四种，即(1, 0)+(0, 1)=(1, 1)及(1, 2)、(2, 1)、(2, 2)，且易证这种着色是正常的，故G是4-面可着色。故(ii)成立。

(ii)⇒(i)：设G是任意的一个可平面图，G的平面嵌入为$\tilde{G}$，由练习9.2.4(b)，有$\chi(\tilde{G}^{**})=\chi(\tilde{G})$，又由于$\chi^*(G)=\chi(G^*)$，$\chi^*(\tilde{G}^*)=\chi(\tilde{G}^{**})$，于是$\chi(G)=\chi(\tilde{G})=\chi(\tilde{G}^{**})=\chi^*(\tilde{G}^*)\leqslant 4$。故(i)成立。

(i)⇒(iii)：设G是2-边连通3-正则平面单图，则G^*是平面图，由(i)知，G^*是4-可着色的，故G是4-面可着色。再用定理9.12中(ii)⇒(iii)的证明，知(iii)成立。

9.6.6 设G是$\kappa=2$的3-正则图，见题图。



9.6.6题图

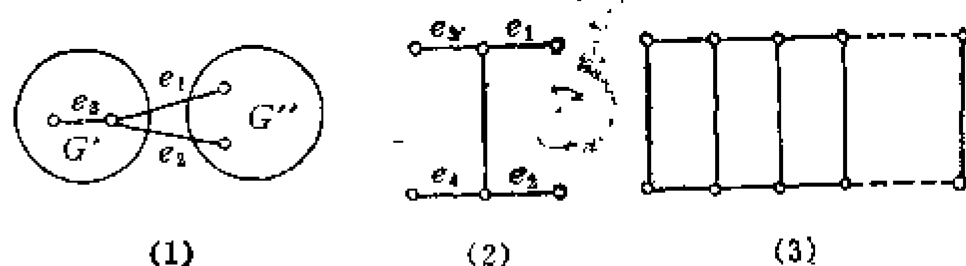
(*a*) 证明 存在G的子图G_1和G_2，以及不相邻的顶点对u_1，$v_1 \in V(G_1)$，u_2，$v_2 \in V(G_2)$，使得G是由G_1和G_2通过"梯子形"连接顶点u_1、v_1、u_2和v_2而组成。

(*b*) 证明 若$G_1+u_1v_1$以及$G_2+u_2v_2$均有Tait着色法，则G也有Tait着色法。

(*c*) 用定理9.12推导，四色猜测等价子Tait猜测：任意3-正则3-连通可平面单图均有Tait着色法。

证：(*a*) 由于$\kappa'=2$，故存在e_1，$e_2 \in E(G)$，$G-e_1-e_2$离散成G'、G''。e_1，e_2不可能有公共顶点。否则由于G是3-正则图，如图(1)中的e_3必是G的割边，这与$\kappa'=2$矛盾。又若e_1、e_2的端点有边相连，则如图(2)，在G'中存在e_3、e_4，类似对e_1、e_2的证明，e_3、e_4也不可能有公共顶点。若e_3、e_4的左端点仍有边相连，则在G'中存在e_5，$e_6\cdots$。如(*a*)中的u_1，v_1不存在，则这过程一直可以进行下去，由于G'是有限图，故有限次后会出现如图(3)的情况，此时G'的顶点均在"梯子形"上，但这和G是3-正则相矛盾。所以在G'中进行若干次上述过程后，就会出现如题目中所示的u_1、v_1点，把G'剩下来的图记为G_1。类似对G''讨论，可知(1)的结论成立。

(*b*) 设G如题图所示，设$G_1+u_1v_1$，$G_2+u_2v_2$已按

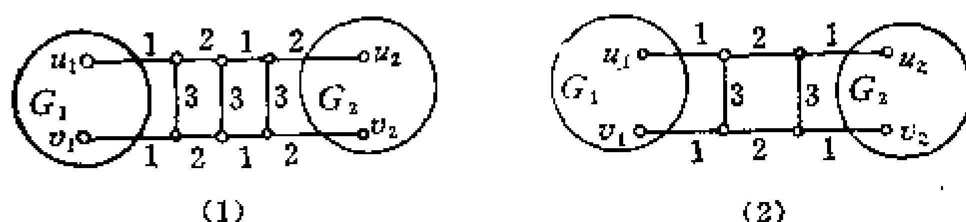


9.6.6 (a) 图

Tait 着色法着色，且不失一般性，当"梯子形"有奇数档时，总可使 u_1v_1 着 1 色，u_2v_2 着 2 色。当"梯子形"有偶数档时，总可使 u_1v_1、u_2v_2 均着 1 色。于是可转换为如图(1)、(2)所示的着色。它们是 G 的 Tait 着色。

当"梯子形"为奇数档时，以 3 档为例，如图(1)

当"梯子形"为偶数档时 以 2 档为例，如图(2)



9.6.6 (b) 图

(c) 设 G 是3-正则3-连通平面单图，故有 $\kappa'=3$。从而由定理 9.12 知，若四色猜测成立，推知 Tait猜测也成立。反过来由定理9.12只需证明，若Tait猜测成立则2-边连通3-正则可平面单图 G 必有 Tait 着色法。由(a)知，G 是题图中所示的图，显然 $G_1+u_1v_1=\bar{G}_1$ 是 3-正则图，且由 Menger 定理，$\kappa'(\bar{G})\geq 2$。若$\bar{G}_1$ 仍为 2-边连通，则可用(a)对 $\bar{G}_1$ 继续分解下去，由于图 G 是有限的，且是 3-正则的，从

而到某一步后用(a)分解出来的$\bar{G}_1\cdots$均是3-边连通图，由练习3.1.6知它们的$\kappa=3$。故若Tait猜测成立，则$\bar{G}\cdots$等有Tait着色，再多次用(b)，知G亦有Tait着色。所以假如Tait猜测成立，则四色猜测也成立。

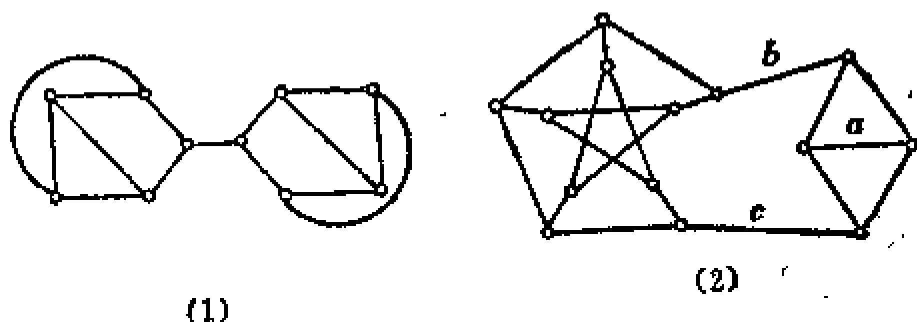
9.6.7 给出下列例子：

(a) 无Tait着色法的3-正则平面图。

(b) 无Tait着色法的3-正则2-连通图。

解：(a) 其例见图(1)，它无Tait着色法。

(b) 其例为Petersen图，易直接验证它无Tait着色法。利用Petersen图还可构作图(2)所示的3-正则2-连通图。若图(2)有Tait着色，则a、b、c必着同色，但这样一来，相当于Petersen图有Tait着色了，矛盾。



9.6.7 图

对图(1)和Petersen图也可以如下证明它们不存在Tait着色法。

用反证法，若图(1)或Petersen图存在Tait着色法，并已用1，2，3色进行了Tait着色，则1，2色边在图中的导出子图G_{12}是图的2-因子，且每个圈均为偶圈，由于这两图均无Hamilton圈，又$\nu=10$，故G_{12}仅能是4-圈

和6-圈组成的2-因子，但在图(1)中不含6-圈，而 Petersen 图不含4-圈，矛盾。所以图(1)和 Petersen 图不存在 Tait 着色法。

9.6.8 若 $P(k)=k(k^2-6k+5)Q(k)$，其中 $Q(k)$是 $\nu-3$ 次多项式，证明 $P(k)$不是平面图的色多项式。

证：若 $P(k)$是某图 G 的色多项式，由于 $P(5)=0$，故 G 不存在 5-正常着色。又由于平面图是5-可着色的。故G一定是非可平面图。所以结论成立。

9.7 非 Hamilton 可平面图

定理 9.13(Grinberg 定理) 若 G 是平面图，且具有 Hamilton 圈 C。若 ϕ'_i，ϕ''_i 分别表示含在 C 内、C 外的面度为 i 的面的个数，则 $\sum\limits_{i=1}^{\nu}(i-2)(\phi'_i-\phi''_i)=0$。

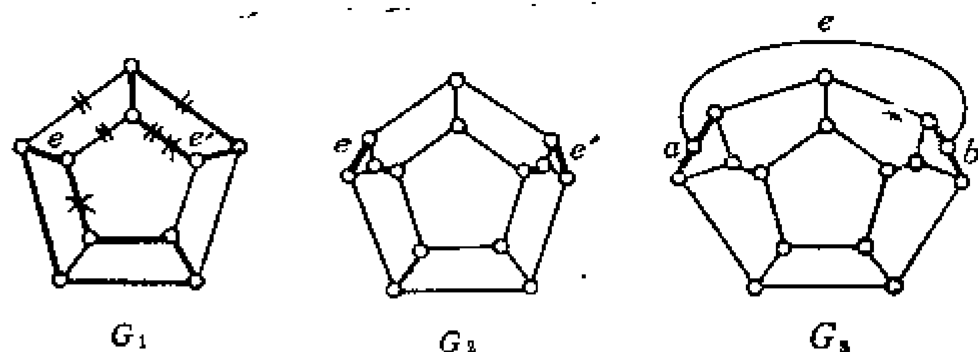
9.7.1 (a) 证明 图 G_1 中没有 Hamilton 圈同时含有 e 和 e' 边。

(b) 用(a)证明 图 G_2 中没有 Hamilton圈同时含边 e 和 e'。

(c) 用(b)证明 G_3 中所有 Hamilton 圈均含边 e。

(d) 推导 Tutte 图是非 Hamilton 的。

证：(a) 若 G_1 中含 e、e' 的 Hamilton圈 C 存在，则 G_1 中带"||"的四条边不可能同时在 C 上，于是由对称性可假定两条带"×"的边在 C 上。从而立即导出粗边均在 C 上，但粗边中已含有不是 Hamilton 圈的圈，故(a)成立。



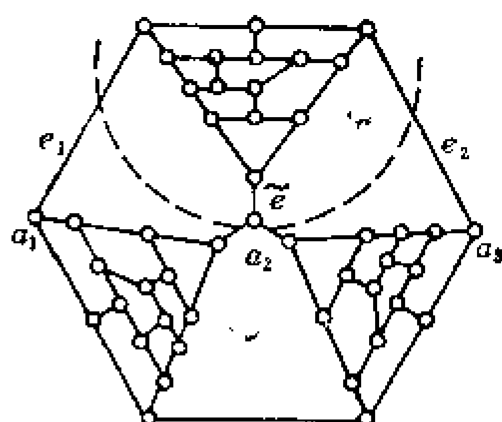
9.7.1 题图

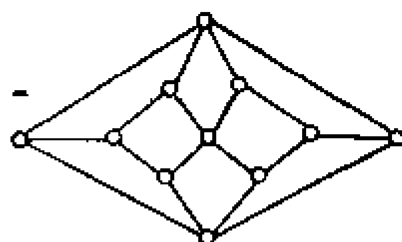
(b) 若 G_2 中存在含 e、e' 的 Hamilton 圈 C，则粗边所示的边一定在 C 上，可是这样一来，若把 e、e' 连同它所在的三角形收缩成一点，则 G_2 变成 G_1，G_2 中的粗边变成 G_1 中的 e、e' 边，由(a)知这不可能，故(b)成立。

(c) 若 G_3 中存在不经过 e 边的 Hamilton 圈 C，则 C 必须包含粗边所示的路，若将这粗边的路换成一边，则 C 就变成 G_2 中经过 e、e' 的 Hamilton 圈，由(b)知，这不可能，故(c)成立。

(d) 若 Tutte 图中含 Hamilton 圈 C，易知，C 中必含 $\{e_1, e_2, \tilde{e}\}$ 三条边中的两条（见图）。若 C 含 C_1，e_2，我们将顶点 a_1、a_2、a_3 合成一点 a，则 Tutte 图中虚线所示的上面部分变成 G_3，且 $\tilde{e}$ 相当于 G_3 中的 e，这样就得到 G_3 中不含 e 的 Hamilton 圈，与(c)矛盾，故圈 C 必须经过 $\tilde{e}$。再由对称性知，和 a_2 点关联的三边均应含于 C 中，这是不可能的。所以 Tutte 图不存在 Hamilton 圈，故(d)成立。

9.7.2 用定理 9.13 证明 Herschel 图是非 Hamilton 图（事实上，它是最小非 Hamilton 3-连通平面图）。





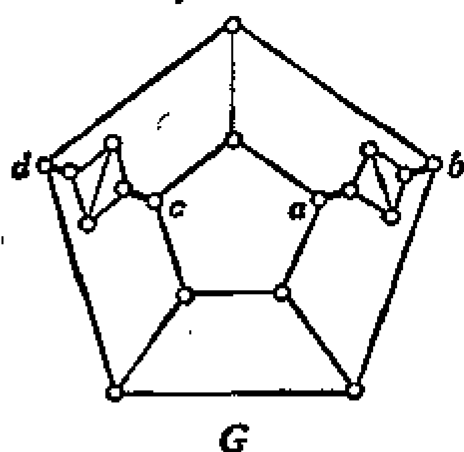
Hershel 图

9·7.1 Tutte 图　　　　9.7.2 图

证：Herschel 图的 $\phi_4=\phi'_4+\phi''_4=9$，其余的 $\phi_i=\phi'_i+\phi''_i(i\neq 4)$均为零，从而 $\phi'_4-\phi''_4\neq 0$，而其它的 $\phi'_i-\phi''_i=0$ $(i\neq 4)$，于是 $\sum\limits_i^{\phi}(i-2)(\phi'_i-\phi''_i)=2(\phi'_4-\phi''_4)\neq 0$。故由定理9.13 知，Herschel 图是非Hamilton图。

9.7.3　给出一个2-连通3-正则非Hamilton可平面单图的例子。

解：如图 G 是平面单图，易检查 G 是 2-连通 3-正则图，其中$\{a, b\}$就是它的一个2-顶点割集。若 G 存在Hamilton 圈 C，则图中所示的粗边一定在 C 上，将 G 中的粗边连同夹在其中的"　　"一起去掉，换上 ab、cd 边，于是 G变成练习 9.7.1 中的 G_1，C 就变成 G_1的一条含 e、e' 的Hamilton 圈，由练习 9.7.1(a)知，这不可能。所以 G 是非 Hamilton 图，故 G 是满足要求之例子。



9.7.3图

9.7.4 (a) G是一个图，B是G的键，若$G-B$为2-树(即它的二个分支均为树)时，称B是G的Hamilton键。试证连通平面图G含Hamilton圈的充要条件是对偶图G^*含Hamilton键。

(b) 试在平面图的对偶图上叙述Grinberg定理，并证明它对非可平面图也成立。

证：(a)⇒：设C是G的Hamilton圈，由练习9.2.3(a)知，C在G^*中对应的边集是键，记为B^*。记C内各面对应在G^*中的顶点集的生成子图为T'，显然T'是连通的，且T'无圈，不然$\{e\in G|e^*\in T'\}$中含有G的键，由于G的顶点均在C上，这是不可能的。故T'是一棵树。同理，G^*-B^*的另一分支也是一棵树。故B^*是G^*的Hamilton键。

⇐：设B^*是G^*中的Hamilton键，由练习9.2.3(a)知，B^*在G中对应的边集是圈记为C。若C不是G的Hamilton圈，于是存在$v_0\notin C$，由G的连通性，v_0不可能是

G 的孤立点。取与 V_0 相关联之边集记为 B_0，显然它是 G 中的键，且 $B\subseteq G-C$。于是由练习 9.2.3(a)，$\{e^*\in G^* | e\in B_0\}\subseteq G^*-B^*$中含圈，这与 G^*-B^* 是2-树相矛盾。故 C 是G中的 Hamilton 圈。

(*b*) Grinberg 定理在平面图的对偶图上应叙述成："若 G 是平面图，且具有 Hamilton 键 B，则：

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i-2)(v'_i-v''_i)=0$$

其中 v'_i、v''_i 分别记为$G-B$中的2-树T'、T''中度为 i 的顶点个数。"

下面对 G 是非可平面图时，证明上述变型的 Grinberg 定理。令 $E'=E(T')$，$\varepsilon'=|E'|$，于是$v(T')=\varepsilon'+1$。故有

$$\sum_{i=1}^{\infty}v'_i=\varepsilon'+1 \qquad (1)$$

又 E' 中之边恰以 T' 中的两个顶点为端点。而 B 中每一边恰以 T' 中一个顶点为端点，故有：

$$\sum_{i=1}^{\infty}iv'_i=2\varepsilon'+|B| \qquad (2)$$

(2)－2(1)得：
$$\sum_{i=1}^{\infty}(i-2)v'_i=|B|-2 \qquad (3)$$

类似可得：
$$\sum_{i=1}^{\infty}(i-2)v''_i=|B|-2 \qquad (4)$$

(3)－(4)得：
$$\sum_{i=1}^{\infty}(i-2)(v'_i-v''_i)=0$$

故定理得证。

9.8 平面性算法

定义：若 B 为 G 的子图 H 的任一桥，且 B 对 H 接触顶点均包含在 H 的平面嵌入 $\tilde{H}$ 的一个面 f 的边界上，则称 B 在 f 中是**可画的**。我们将 B 在其中是可画的 $\tilde{H}$ 的那些面的集合记为 $F(B, \tilde{H})$。

定义：G 是可平面图，H 是 G 的子图，$\tilde{H}$ 是 H的一个平面嵌入，若 G 有一个平面嵌入 $\tilde{G}$使 H 的平面嵌入$\tilde{H}\subseteq\tilde{G}$，则称 $\tilde{H}$ 是 **G-可容纳**的。

定理9.14 若 $\tilde{H}$ 是 G-可容纳的，那么，对 H 的所有桥 B，都有 $F(B, \tilde{H})\neq\phi$。

平面性算法：

1. 设 G_1 是 G 中的圈，求 G_1 的一个平面嵌入 $\tilde{G}_1$，令 $i=1$。

2. 若 $E(G)\setminus E(G_i)=\phi$，停止；否则，确定 G 中G_i的所有桥，对每一个这样的桥B，都求出集合 $F(B, \tilde{G}_i)$。

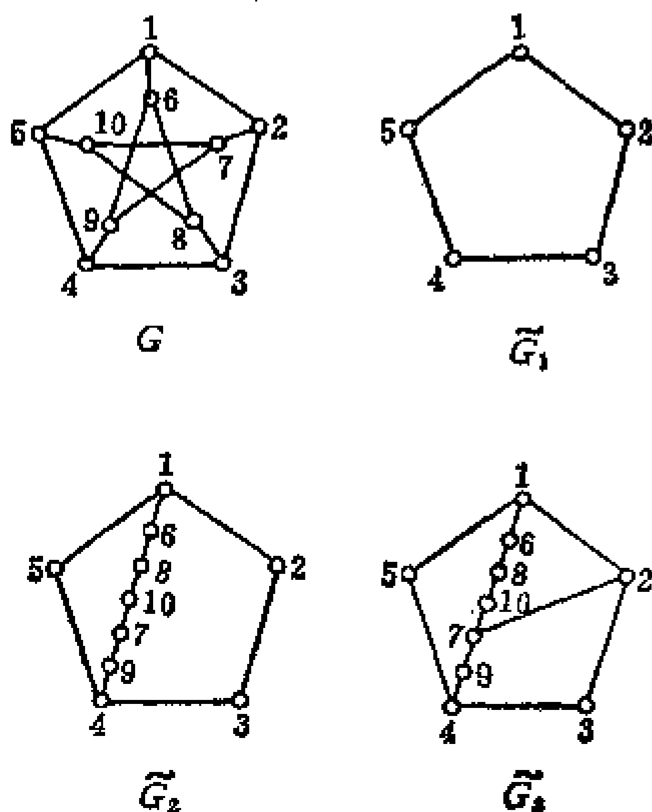
3. 若有桥 B 使 $F(B, \tilde{G}_i)=\phi$；则停止（这时根据定理9.14，G是非可平面图）。否则，若有桥B使 $|F(B, \tilde{G}_i)|=1$，则令$\{f\}=F(B, \tilde{G}_i)$；否则，设 B 为任一桥，令 f 为 $F(B, \tilde{G}_i)$中的任一面。

4. 选择一条连接 B 对于 G_i的两个接触顶点的路$P_i\subseteq B$，令 $G_{i+1}=G_i\cup P_i$，将 P_i 画在 $\tilde{G}_i$ 的面f内，得到G_{i+1}的一个平面嵌入 $\tilde{G}_{i+1}$，将i 用 $i+1$ 来代替转入第 2 步。

9.8.1 用平面性算法证明 Petersen 图是非可平面

图。

证：如图，从图 $\tilde{G}_1=123451$ 开始：{16，27，38，49，5(10)，68，69，7(10)，79，8(10)}；{69}，{27}，{38}，{5(10)}；{69}，{38}，{5(10)}分别为 $\tilde{G}_1$、$\tilde{G}_2$、$\tilde{G}_3$ 每一步中的各个桥(为简单起见用{ }中的边集合来表示)，粗体字表示其中 $|F(B,\ \tilde{G}_i)|=1$ 的桥 B。$\tilde{G}_2$ 由 $\tilde{G}_1$ 加路 $P_1=168(10)794$ 得到，$\tilde{G}_3$ 由 $\tilde{G}_2$ 加路 $P_2=27$ 得到。最后，$\tilde{G}_3$ 中由 38 组成的桥 B 有 $|F(B,\ \tilde{G}_3)|=0$，从而 Petersen图是非可平面图。



9.8.1 图

第十章 有向图

10.1 有向图

定义：**有向图** D 是如下的一个有序三元组$(V(D), A(D), \psi_D)$，其中$V(D)$是**顶点**的非空集合；$A(D)$是**弧**的集合，且$A(D)$与$V(D)$无公共的元素；ψ_D是一个将$A(D)$中的每一个弧和$V(D)$中的顶点有序对(可以相同)相联系的**关联函数**。若$a\in A(D)$，u，$v\in V(D)$且$\psi_D(a)=(u, v)$，则称u为a的**尾**，v为a的**头**。

定义：每一个有向图D，可以构作一个无向图G如下：$V(G)=V(D)$，$A(D)$中的每条弧，用相同端点的边来代替，构成$E(G)$，$\psi_G=\psi_D$，我们称上述G是D的**底图**。反过来，对任一无向图G，对它的每一边的两端点规定一个次序，就相应地得到一个有向图D，我们称D为G的一个**定向**，在本章中约定用D记有向图，用G来记D的底图。

定义，有向图D中，若不含环、且有相同端点的两条弧没有一对是相同的，称D是**严格的有向图**。

类似于无向图，可定义**有向途数**、**有向数**、**有向路**、**有向数数分支(强连数分支)**和**内度** $d_D^-(v)$，**外度** $d_D^+(v)$。

将无向图的边看成两个方向相反的弧，则无向图也可以看成有向图，故有向图是更广泛的一类图。读者可参阅

C.Berge著的《Graphs and Hypergraphs》(1973)。它是一本用有向图来叙述图论基本结果的著作。

10.1.1 一个单图G，可构作出多少个定向图？

解：由于单图G的每一边，有两个方向可供选择，故单图G可构作出$2^{\varepsilon(G)}$个定向图。

10.1.2 证明$\sum_{v\in V}d^-(v)=\varepsilon=\sum_{v\in V}d^+(v)$。

证：由于D中的任一弧恰有一个头和一个尾，故上述命题成立。

10.1.3 设D是一个不含有向圈的有向图。

(a) 证明$\delta^-=0$。

(b) 推导：$V(D)$中有一个排序$v_1, v_2, \cdots, v_\nu$使得对于$1\leqslant i\leqslant \nu$，$D$中头为$v_i$的所有弧，其尾都在$\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}\}$中。

证：(a) 用反证法，若$\delta^->0$，则D中每一个顶点至少有一条入弧，故均可沿这弧反向到达D的另一个顶点，且这过程永远不会终止。另一方面，由于D是不含有向圈的有限图，故上述过程不可能永远进行下去。矛盾。所以$\delta^-=0$。

(b) 由(a)知，存在$v_1, d_D^-(v_1)=0$，然后考虑$D_1=D-v_1$，它仍为一个不含有向圈的有向图，再由(a)知，存在v_2，$d_{D_1}^-(v_2)=0$；再考虑$D_2=D_1-v_2=D-\{v_1, v_2\}$，如此一直进行下去，共进行$\nu$次后，得$v_1, v_2, \cdots, v_\nu$，按作法易知，即为所求之$V(D)$的排序。

10.1.4 证明：D为有向连通的充要条件是D是连通

的，且 D 的块是有向连通的。

证：⇒：由于 D 中的一条有向路，在 D 的底图 G 中是一条路，从而由定义，D 是有向连通时，D 显然是连通的。又设 D_1 是 D 中之块，D_1 上任意两顶点 u，v，由于 D 是有向连通的，从而在 D 中存在有向路 $P(u, v)$ 和 $Q(v, u)$，由于端点在同一块的有向路不可能包含其它块中之顶点，故 $P(u, v)$ 和 $Q(v, u)$ 亦是 D_1 中的有向路，故按定义 D_1 是有向连通的。

⇐：设 u，v 是 D 中分属于不同块的两个顶点，由于 D 是连通的，故在 D 中存在连接 u，v 的路，在路上依次经过 D 的割点 u_1，u_2，…，u_k，由于 u，u_1 属于 D 的同一块，故存在 $P_1(u, u_1)$-，$Q_1(u_1, u)$-有向路，u_{i-1}，$u_i(i=2, \cdots, k)$ 属于 D 的同一块，故存在 $P_i(u_{i-1}, u_i)$-，$Q_i(u_i, u_{i-1})$-有向路，最后由于 u_k，v 属于 D 的同一块，故存在 $P_{k+1}(u_k, v)$，$Q_{k+1}(v, u_k)$-有向路，于是 $P_1(u, u_1)\cup P_2(u_1, u_2)\cup\cdots\cup P_k(u_{k-1}, u_k)\cup P_{k+1}(u_k, v)=P(u, v)$，$Q_{k+1}(v, u_k)\cup Q_k(u_k, u_{k-1})\cup\cdots\cup Q_2(u_2, u_1)\cup Q_1(u_1, u)=Q(v, u)$ 分别是 D 中的有向路，所以按有向连通的定义，D 是有向连通的。

10.1.5 D 的逆 $\overleftarrow{D}$ 是由 D 倒转每条弧的方向得到的有向图。

(a) 证明：(i) $\overleftarrow{\overleftarrow{D}}=D$；(ii) $d^+_{\overleftarrow{D}}(v)=d_D^-(v)$；(iii) $\overleftarrow{D}$ 中 v 由 u 可达的充要条件是 D 中 u 由 v 可达的。

(*b*) 利用(*a*)中(ii)及练习 10.1.3(*a*)，证明：若 D 是不含有向圈的有向图，则 $\delta^+=0$。

证：(*a*) 按定义结论是显然的。

(*b*) 由(*a*)中(ii)，故 $\delta_D^+=\delta^-_D$，又若 D 不含有向圈，则显然 $\overrightarrow{D}$ 亦不含有向圈，故由练习 10.1.3(*a*)知有 $\delta^-_D=0$，所以 $\delta_D^+=0$。

10.1.6 证明：若 D 是严格的有向图，则 D 含有长度不小于 $\max\{\delta^-,\ \delta^+\}$ 的有向路。

证：不失一般性，可假定 $\max\{\delta^-,\ \delta^+\}=\delta^+$。不然考虑 $\overleftarrow{D}$ 即可。设 $P(u_0,\ v_0)$ 是 D 中的最长有向路，若它的长度小于 δ^+，则由于 D 是严格的，必存在以 v_0 为尾，头不在 $P(u_0,\ v_0)$ 中的弧，从而 $P(u_0,\ v_0)$ 可继续延长，这与 $(u_0,\ v_0)$ 是最长有向路相矛盾。所以 $P(u_0,\ v_0)$ 的长度不 P 小于 $\delta^+=\max\{\delta^-,\ \delta^+\}$。

10.1.7 证明：若 D 是严格的有向图，且 $\max\{\delta^-,\ \delta^+\}=k>0$，则 D 中含有长度不小于 $k+1$ 的有向圈。

证：不失一般性，可以假定 $\max\{\delta^-,\ \delta^+\}=\delta^+$，不然考虑 $\overleftarrow{D}$ 即可。由练习 10.1.6 知，D 中之最长有向路 $P(u_0,\ v_0)$ 长度 $\geqslant k$，由于 D 是严格的，从而应有 $d^+(v_0)\geqslant k$ 条头不相同的弧，以 v_0 为尾。且由于 $P(u_0,\ v_0)$ 是最长性知，这些以 v_0 为尾的 $d^+(v_0)$ 条弧的头均在 $P(u_0,\ v_0)$ 上，故 D 中含有长度不小于 $k+1$ 的有向圈。

10.1.8 设 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_\nu$ 是有向图 D 的顶点，D 的

邻接矩阵是一个 $\nu\times\nu$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$，其中 a_{ij} 是 D 中尾为 v_i，头为 v_j 的弧的条数，证明 A^k 的 (i, j) 元素的值是 D 中长度为 k 的 (v_i, v_j)-有向途径的条数。

证：对 k 用归纳法。$k=1$ 时，由 A 的定义知命题成立。设对 A^{k-1} 命题已成立。今考虑 $A^k=(a_{ij}^{(k)})=A^{k-1}A$，故 $a_{ij}^{(k)}=\sum\limits_{l=1}^{\nu}a_{il}^{(k-1)}a_{lj}$，由归纳法假定 $a_{il}^{(k-1)}$ 表示 D 中长度为 $k-1$ 的 (v_i, v_l)-有向途径的条数，而 a_{lj} 则表示 D 中 v_l 为尾，v_j 为头的弧的条数，故 $a_{il}^{(k-1)}a_{lj}$ 表示 D 中最后经由弧 (v_l, v_j) 的长度为 k 的 (v_i, v_j)-有向途径的条数。由于 D 中任一条 (v_i, v_j)-有向途径，最后总要经由某一条 (v_l, v_j) 弧，所以 $a_{ij}^{(k)}$ 恰表示 D 中长度为 k 的 (v_i, v_j)-有向途径的条数。由归纳法知，命题成立。

10.1.9 设 $D_1, D_2, \cdots, D_m$ 是 D 的有向连通分支，所谓 D 的凝聚图 $\hat{D}$ 是定义如下的 m 个顶点 $w_1, w_2, \cdots, w_m$ 的有向图，$\hat{D}$ 中有尾为 w_i，头为 w_j 的弧的充要条件是 D 中有尾在 D_i 中，而头在 D_j 中的弧，证明 D 的凝聚图 $\hat{D}$ 不含有向圈。

证：若 $\hat{D}$ 中含有有向圈，则按 $\hat{D}$ 的定义，对应在 D 中含有连接 D 的数个有向连通分支的顶点的有向圈。但这样一来，对应的这数个有向连通分支，按定义应是同一个有向连通分支，矛盾。故 $\hat{D}$ 不含有向圈。

10.1.10 证明：G 有定向 D，使得对所有的 $v\in V(G)$ 都有 $|d_D^+(v)-d_D^-(v)|\leqslant 1$。

证：G 有偶数个奇度顶点，将这些顶点一对一对联边，得 Euler 图 G'。在 G' 上找一 Euler 环游，自它的起点开

始沿此 Euler 环游前进的方向给各边定向，得有向图 D'，显然 $\forall v\in V(G)$ 有 $d^+_{D'}(v)=d^-_{D'}(v)$。将 D' 中外加给 G 的边对应的弧去掉，得 G 的一个定向 D，易知 D 满足

$$|d^+_D(v)-d^-_D(v)|\leqslant 1,\quad \forall v\in V(G)。$$

10.1.11 树的定向称为**有向树**。有向图 D，若它的任一顶点均由顶点 a 可达，则称 a 是D的**根**。有根的有向树称为**树形**。又有向图 D 称为**拟强连通的**，如果对 D 中任一对顶点 u，v，总存在 w，它到 u，v 均可达。T 是树形的充要条件是它是拟强连通的，且满足下面三个条件之一：

(a) $\varepsilon(T)=\nu(T)-1$；

(b) T 中去掉任一条弧均破坏其拟强连通性；

(c) T 中存在一顶点 a，$d^-_T(a)=0$，$d^-_T(u)=1$ 又对 $u\in V(T)$，$u\neq a$，$d^-_T(u)=1$。

证：⇒：由定义，T 显然是拟强连通的。又由定理2.2知，(a)成立；由于树形的底图是树，树的每一边(对应在树形中是一条弧)均是割边，故(b)成立；若 T 中的根为 a，$d^-_T(a)>0$，设$(v,a)\in A(T)$，又由根的定义，在T中存在(a,v)-有向路，于是它和(v,a)弧构成 T 中的有向圈，矛盾。所以 $d^-_T(a)=0$。类似地，若 $d^-_T(u)\geqslant 2$，设(v,u)、$(w,u)\in A(T)$，再加上 T 中的(a,v)-，(a,w)-有向路，它们之中一定含有圈，矛盾，故(c)成立。

⇐：由于 T 是拟强连通的，设 T 的顶点为 v_1，v_2，…，v_ν，于是存在 u_1，它到 v_1，v_2 可达。存在 u_2，它到 u_1，v_3可达，…。最后存在顶点 $u_{\nu-1}$，它到 $v_{\nu-2}$，v_ν 可达。显然 $u_{\nu-1}$ 是 T 的根。又 T 显然是连通的，若(a)成立，则由定理2.2知，T 的底图是树，故 T 是树形。又若(b)成立，

则(c)成立。这是因为若 $d_T^-(a)>0$，则去掉 a 的入弧，不破坏 T 的拟强连通性。若 $d_T^-(u)\geq 2$，$a\neq u\in V(T)$，设 (v, u)，$(w, u)\in A(T)$，因而有两条不同的有向路由 a 到 u 可达，如果去掉 (v, u) 弧，不破坏 T 的拟强连通性。这些均与(b)矛盾。最后若(c)成立，则由练习 10.1.2，有 $\varepsilon(G)=\nu(G)-1$，于是由(a)知，T 是树形。

10.2 有 向 路

定义：完全图的定向称为**竞赛图**。

定理10.1 有向图 D 含有长度为 $\chi-1$ 的有向路。

系10.1 竞赛图总含有有向 Hamilton 路。

定理10.2 无环有向图 D 存在一个独立集 S，使得所有不在 S 中的顶点都可以从 S 中的顶点出发，经长度不大于 2 的有向路而到达。

系10.2 竞赛图总存在这样一个顶点，由此顶点出发，其余顶点均可经由长度不超过 2 的有向路到达。

10.2.1 证明：竞赛图或是有向连通图，或只要改变一条弧的方向，就可变成有向连通图。

证：由系 10.1 知，竞赛图恒存在有向 Hamilton 路，从而竞赛图或者有有向 Hamilton圈，或改变一条弧的方向后，有有向 Hamilton 圈，故结论成立。

10.2.2 有向图 D 中任意两个顶点 u 和 v，或者可从 u 到达 v，或者可从 v 到达 u，则称 D 为**单向的**。证明：D 是单向的充要条件是 D 中有一条生成有向途径。

证：⇒：构作一个新的有向图 D_1，其顶点和 D 的顶点相同，当且仅当在 D 中可从 u 到达 v 时，在 D_1 中连以弧 (u,v)。于是由D的单向性，推知 D_1 中包含了一个以$V(D)$为顶点集的竞赛图 T 作为它的有向子图。由系 10.1 知，T 中存在有向 Hamilton 路，从而在 D_1 中亦存在有向 Hamilton 路，它对应在 D 中，恰是 D 中的一条生成有向途径。

⇐：显然。

10.2.3 (a)设 $P=(v_1,v_2,\cdots,v_k)$是竞赛图D中的一条极大有向路，若 P 不是 Hamilton 路，对任一 $v\notin P$，证明存在某个 i，有(v_1,v)和(v,v_{i+1})都是 D 中的弧。

(b) 证明 Rédei 定理(即系 10.1)

证：(a) 由于 P 是极大有向路，从而仅能(v_1,v)、$(v,v_k)\in A(D)$。又由于 D 是竞赛图，每一个 v_i，$i=1,2,\cdots,k$ 均与 v 有弧相连。从而至少存在这样一个 i，有 (v_i, v)，$(v, v_{i+1})\in A(D)$。

(b) 若D中的最长有向路$P=(v_1,v_2,\cdots,v_k)$不是Hamilton 有向路，故存在$v\notin P$，由(a)知，存在某个 v 有(v_i,v)、$(v,v_{i+1})\in A(D)$，于是有向路$(v_1,v_2,\cdots,v_i,v,v_{i+1},\cdots,v_k)$是一条比 P 更长的有向路，这和 P 是最长有向路的假定相矛盾，故 P 是 D 中的 Hamilton 有向路。

10.2.4 借助最大外度顶点，来证明系 10.2。

证：设 v_0 是竞赛图 D 中的最大外度顶点。在 D 中若存在 v_1，使 v_0 到 v_1 需长度大于 2 的有向路才能到达，则$(v_1,v_0)\in A(D)$，且 v_0 的外邻点必需也是 v_1 的外邻点。于是 $d_D^+(v_1)>d_D^+(v_0)$，这和 v_0 是 D 的最大外度顶点的假定相

矛盾。故系 10.2 成立。

10.2.5 (a)设 D是$\chi>mn$的有向图，f 是定义在$V(D)$上的实值函数。证明：D 或者有一条有向路 $(u_0, u_1, \cdots, u_m)$使得 $f(u_0)\leqslant f(u_1)\leqslant\cdots\leqslant f(u_m)$；或有一条有向路$(v_0, v_1, \cdots, v_n)$使得 $f(v_0)>f(v_1)>\cdots>f(v_n)$。

(V・Chvátal 和J・Komlós)

(b) 推导：任意一个 $mn+1$ 个相异整数的序列或包含一个有 m 项的增子序列或包含一个有 n 项的减子序列。

(P.Erdős 和 G.Szekeres)

证：(a) 由 D 构作 D_1 和 D_2 两个有向生成子图。D 中之弧(u,v)属于$A(D_1)$的充要条件是 $f(u)\leqslant f(v)$。D 中之弧(u,v)属于$A(D_2)$ 的充要条件是 $f(u)>f(v)$。故 $D=D_1\cup D_2$。若$\chi(D_1)\leqslant m$，$\chi(D_2)\leqslant n$，且 D_1,D_2 分别已用m,n种颜色正常着色。设 $v\in V(D)$，在D_1中着i_1色，在D_2中着i_2 色，现对 v 在D中着以(i_1,i_2)色，显然这种着色方式，对D是正常的，故$\chi(D)\leqslant mn$，这与$\chi(D)>mn$相矛盾，所以有$\chi(D_1)>m$或$\chi(D_2)>n$。若$\chi(D_1)>m$，则由定理 10.1 知，在 D_1 中存在一条长度不小于$\chi(D_1)-1\geqslant m$的有向路$(u_0, u_1, \cdots, u_m, \cdots, u_{\chi(D_1)-1})$，按 D_1 定义显然有 $f(u_0)\leqslant f(u_1)\leqslant\cdots\leqslant f(u_m)$。若 $\chi(D_2)>n$，则由定理 10.1知，在D_2中存在一条长度不小于 $\chi(D_2)-1\geqslant n$ 的有向路$(v_0, v_1, \cdots, v_n, \cdots, v_{\chi(D_2)-1})$，按 D_2 定义显然有 $f(v_0)>f(v_1)>\cdots>f(v_n)$，故命题成立。

(b) 设 $mn+1$ 个相异整数序列为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{mn+1}\}$，取 $V(D)=\{v_1, v_2, \cdots, v_{mn+1}\}$，构作如下的竞赛图 D：$(v_i, v_j)\in A(D)$的充要条件是 $i<j$。显然 $\chi(D)=mn+1$。今在$V(D)$上构作实值函数 f，使 $f(v_i)=a_i$，$(i=1,2,\cdots,mn$

+1)。于是由(a)知，在 D 中或有一条有向路($v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_m}$)使得 $f(v_{i_0})\leqslant f(v_{i_1})\leqslant\cdots\leqslant f(v_{i_m})$，即存在 $i_0<i_1<\cdots<i_m$，对应有 $a_{i_0}\leqslant a_{i_1}\leqslant\cdots\leqslant a_{i_m}$；因 a_i 是相异的，故 $a_{i_0}<\cdots<a_{i_m}$；或者在 D 中有一条有向路($v_{i_0}',\cdots,v_{i_n}'$)使得，$(v_{i_0}')>f(v_{i_1}')>\cdots>f(v_{i_n}')$，即存在 $i_0'<i_1'<\cdots<i_n'$ f 对应有 $a_{i_0}'>a_{i_1}'>\cdots>a_{i_n}'$ 故结论成立。

10.2.6 (a) 利用定理 10.1[注]和系8.1.2 证明 G 有一个定向 D，它的每一条有向路的长度均不大于 Δ。

[注]：(a)的证明不必用此定理。

(b) 给(a)一个构造性的证明。

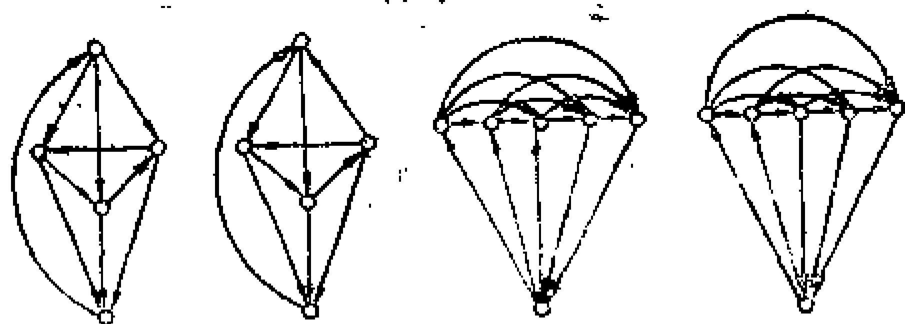
证：(a) 由系 8.1.2 知，$\chi(G)\leqslant\Delta+1$，故 G 存在 $(\Delta+1)$-正常着色，设对 G 已用 $\Delta+1$ 种颜色进行了正常着色。对 G 中之边 uv，定向取为(u,v)的充要条件是 u 的着色 i 小于 v 的着色 j，显然在这种定向下它的有向路的长度$\leqslant(\Delta+1)-1=\Delta$。

(b) 设$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，由于对 G 中任意点 v 连同它的邻点个数不会超过 $\Delta+1$，从而我们总可以依次对 v_i 进行着色，使 v_i 着的颜色和 v_i 的邻点 $v_j(j\leqslant i-1)$着的颜色相异，一直到 G 被 $\Delta+1$ 种颜色正常着色完为止，然后在这种着色基础上，按(a)中的定向方法将 G 定向，记为 D。显然 D 中的有向路长度$\leqslant(\Delta+1)-1=\Delta$。

10.2.7 类似练习 1.4.8，对有向图也有对应的 Ulam 猜想。试举反例说明 $\nu=5,6$ 时，竞赛图的 Ulam 猜想不成立(猜测 $\nu\geqslant7$ 不存在反例)。

(L.W.Beineke和 E.M.Parker)

解：其反例如图：



10.2.7 图

10.2.8 (H.G.Landau, 1955) 非负整数序列：$(r_1, r_2, \cdots, r_v)$是某个竞赛图的出度序列的充要条件是满足：(a) $\sum_{k\in Y} r_k \geqslant \binom{|Y|}{2}$，对任意非空子集$Y\subseteq X=\{1,2,\cdots,v\}$；

(b) $\sum_{k\in X} r_k = \binom{v}{2}$。

证：$\Longrightarrow$：以$X=\{1,2,\cdots,v\}$为顶点集的竞赛图T，任取$Y\subseteq X$，$T[Y]$是$|Y|$个顶点的子竞赛图，由练习 10.1.1，$\varepsilon(T[Y])=\binom{|Y|}{2}$；另一方面，$\sum_{k\in Y} r_k \geqslant \varepsilon(T[Y])$。故必要性成立。

$\Longleftarrow$：$\forall k\in X$，取点集G_k，$|G_k|=r_k$，且使$\{G_k\}$两两不相交，令$G=\bigcup_{k\in X} G_k$；$B=\{(i,j)|1\leqslant i<j<v\}$，$H=\{G_i \cup G_j | (i,j)\in B\}$。显然由(b)，有$|B|=\binom{v}{2}=\sum_{k\in X} r_k=|G|$。

注意到对于非空子集$B'\subseteq B$，令$Y=\{h|(h,j)$或$(j,h)\in B'\}$。于是由(a)有：

$$|B'|\leqslant\binom{|Y|}{2}\leqslant\sum_{k\in Y}r_k=\left|\bigcup_{k\in Y}G_k\right|=\left|\bigcup_{(i,j)\in B'}(G_i\cup G_j)\right| \quad (*)$$

下面定义 2-部图 K，其顶点划分为(B,G)，(i,j)和$v\in G$ 相邻的充要条件是$v\in G_i\cup G_j$。于是$(*)$对K来说就是定理 5.2 的充分条件。又因$|B|=|G|$，故由定理5.2，K中存在完美匹配。即存在一一映射 f：$B\longrightarrow G$。

用 f 我们来构作竞赛图$T=(V,A)$如下：$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_\nu\}$，对于$i<j$，$(v_i,v_j)\in A$的充要条件是$f((i,j))\in G_i$，否则$(v_j,v_i)\in A$。显然由于 f 是一一映射，故有$d_K^+(v_i)=r_i(i=1,2,\cdots,\nu)$。所以 T 是满足已知条件的竞赛图。

10.3 有 向 圈

定理 10.3 在 $\nu\geqslant3$ 的有向连通竞赛图中的每个顶点都含于某个有向 k-圈中，$3\leqslant k\leqslant\nu$。

定理 10.4 若 D 是严格的有向图，且 $\min\{\delta^-,\delta^+\}\geqslant\nu/2>1$，则 D 包含一个有向Hamiltou 圈。

（关于有向圈有极为丰富的内容，读者可参看：J.C.Bermond 和 C. Thomassen 在 J. Graph Theory Vol 5 (1981)1-43 的综合性文章。）

10.3.1 用定理 10.4 来推导定理 4.3。

证： 若 G 是单图，$\nu\geqslant3$，且$\delta\geqslant\nu/2$。对于 G 中之边 uv，分别连以(u,v)，(v,u)弧所得之有向图记为 D，D 显然是严格的且有$\min\{\delta^-,\delta^+\}=\delta\geqslant\nu/2>1$。于是由定理 10.4 知，在 D 中存在一个有向Hamilton 圈，它对应在 G 中的一个Hamilton圈，故定理 4.3 得证。

10.3.2 有向图 D 中的**有向 Euler 游历是**它经过 D 的每一条弧恰好一次的有向游历，证明：D 含有有向 Euler 游历的充要条件是 D 是连通的，且 $d^+(v)=d^-(v)$，对 $\forall v\in V(D)$。

证：$\Rightarrow$：显然。

$\Leftarrow$：易知，D 中含有向圈，设 C 是 D 中最长的有向闭迹，考虑 $D_1=D-A(C)$。若 D_1 是空图，按定义 C 就是 D 中的有向 Euler 游历。若 D_1 不是空图，则不失一般性假定存在 $e\in A(D)\setminus A(C)$，且 e 的一个端点在 C 上。另一方面显然 D_1 中的每一个顶点 $v\in V(D)$ 仍然有 $d_{D1}^+(v)=d_{D1}^-(v)$，故在 D_1 中一定存在含有 e 的有向圈 C_1，$C\cup C_1$ 显然是 D 中比 C 长的有向闭迹，这和 C 的选取相矛盾，故 C 一定是 D 中的有向 Euler 游历。

10.3.3 设 D 是有向图，且满足

(i) $d^+(x)-d^-(x)=l=d^-(y)-d^+(y)$；

(ii) $d^+(v)=d^-(v)$，对 $\forall v\in V\setminus\{x,y\}$。

用练习 10.3.2 证明 D 中有 l 条无公共弧的 (x,y)-有向路。

证：在 D 的基础上，加入 l 条以 y 为尾，x 为头的弧诱导一个新有向图 $\tilde{D}$，对 $\tilde{D}$ 的每一个顶点 v 均成立 $d_{\tilde{D}}^+(v)=d_{\tilde{D}}^-(v)$。取 $\tilde{D}$ 中含 x 顶点的分支 D_1，显然 D_1 满足练习 10.3.2的条件，所以在 D_1 中存在有向Euler游历，由作法，D_1 中含 l 条 (y,x)弧，所以D_1中存在 l 条不含(y,x)的(x,y)-有向迹，将这些有向迹上所含的有向圈除去，最后得到 D_1中 l 条不含(y,x)的 (x,y)-有向路，显然它也是 D 中的 l 条无公共弧的(x,y)-有向路。

10.3.4 证明：有向连通图，若它含奇圈，则它亦含有向奇圈。

证： 设 $v_1v_2\cdots v_{2k+1}v_1$ 是有向图 D 中的奇圈，若 $e_i=(v_i,v_{i+1})\in A$，则令 $P_i=v_ie_iv_{i+1}$。若 $(v_i,v_{i+1})\notin A$，则 $(v_{i+1},u_i)\in A$，且由于 D 是有向连通的，所以存在一条 (v_i,v_{i+1})-有向路，记为 P_i，若 P_i 为偶数长，则 $P_i+(v_{i+1},v_i)$ 是 D 中的有向奇圈，命题已成立。故假定 $P_i(i=1,2,\cdots,2k+1)$ 均为奇数长的路，于是 $P_1P_2\cdots P_{2k+1}$ 是 D 中的一条有向奇闭途径 T。下面由 v_1 出发，沿 T 前进，在前进过程中假如已产生有向圈，且是有向奇圈，则命题已成立。若是有向偶圈，则将它从 T 中除去，继续沿 T 前进，直到走完为止。显然，最后剩下来的有向圈一定是有向奇圈，故命题成立。

10.3.5 如果 $V(D)$ 中每一个非空真子集 S，均有 $|(S,\overline{S})|\geqslant k$，则称非平凡有向图 D 是 **k-弧连通的**。证明非平凡有向图 D 是有向连通的充要条件是它是 1-弧连通的。

证： $\Rightarrow$：设 S 是 V 的非空真子集，任取 $v_1\in S$，$v_2\in\overline{S}$，由于 D 是有向连通的，从而在 D 中存在 (v_1,v_2)-有向路，所以 $(S,\overline{S})$ 非空，即 $|(S,\overline{S})|\geqslant 1$，按定义 D 是 1-弧连通的。

$\Leftarrow$：设 D 是 1-弧连通的，但不是有向连通的。设 v_1，v_2 在 D 中不存在 (v_1,v_2)-有向路，令 S 是 D 中存在 (v_1,v)-有向路的所有顶点 v 的集合。显然 $v_2\in\overline{S}$，但 $(S,\overline{S})=\Phi$，故 $|(S,\overline{S})|=0$，这与 D 的假设相矛盾。故 D 是有向连通的。

10.3.6 图 G 的**相伴有向图** $D(G)$ 是指将 G 的每条边 e，用和 e 有相同端点的两条方向相对的弧来代替 e 所得到的有向图。证明：

(a) G 的路和 $D(G)$的有向路之间存在 1-1 对应；

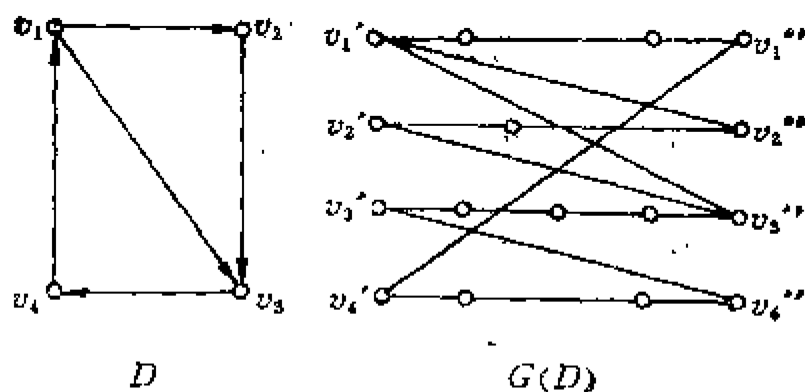
(b) $D(G)$是 k-弧连通的充要条件是 G 是 k-边连通。

证：(a) 若 $P=v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$ 是 G 中的一条路，则 $\overrightarrow{P}=(v_0,a_1,v_1,a_2,\cdots,a_k,v_k)$，其中 $a_i=(v_{i-1},v_i)\in A(D(G))$，是$D(G)$中一条有向路，令$P$和$\overrightarrow{P}$之间建立一个对应关系，易知这对应关系是 1-1 的。

(b) 由(a)及 k-弧连通和 k-边连通的定义，结论是显然的。

10.3.7 试证明：对解决图的 Hamilton 问题来说，2-部图、无向图和有向图都是一样困难的吗？

证：由于 2-部图和无向图可以看成有向图的特殊情况，从而只需证明："假如 2-部图的 Hamilton 问题已解决，则有向图的 Hamilton 问题由此而得到解决"。为此我们将任一有向图 D，相应地构造一个 2-部图 $G(D)$ 如下：D 的任一顶点 v，对应于 $G(D)$的两个顶点 v'，v''，又以 v'，v'' 为端点作一条路 P_v，其长度$\geqslant 2$，且不同的 P_v 顶点不相交。对于 D 中任一弧(v_i,v_j)，在 $G(D)$中增加一条 $v_i'v_j''$ 的边，如图所示。



10.3.7 图

显然 D 存在有向Hamilton圈的充要条件是$G(D)$存在Hamilton圈。另外当 P_v的长均取奇数长时，$G(D)$ 是 2-部图，故命题成立。

10.3.8 每一个顶点的出度和入度均为 k 的竞赛图称为**k-正则竞赛图**。证明k-正规竞赛图的弧可以分解成两两弧不相交的 2-因子和。即它可 2-因子化。(P.Kelly在1966年提出如下著名的猜测：k-正则竞赛图可以分解成两两弧不相交的有向 Hamilton 圈，这猜测至今尚未解决。)

证：对给定的 k-正则竞赛图T，类似于练习10.3.7构作$G(T)$，即把 T 中的顶点 v，在$G(T)$中拉开成 v', v'' 两个顶点，不过这里不作路 P_v。于是 T 是可 2-因子化的充要条件是 $G(T)$是 1-可因子化的。另一方面，由 T 的 k-正则性，$G(T)$是 k-正则 2-部图，于是由系 5.2 知，$G(T)$中存在1-因子 M。注意到 $G(T)-M$ 仍然是$(k-1)$-正则 2-部图，故多次应用系 5.2 的结果知，$G(T)$是可 1-因子化的，综合上述，故命题成立。

10.3.9 竞赛图中形如""的子图，称为**传递三角形**。若竞赛图 T 具有出度序列$(S_1, S_2, \cdots, S_v)$则：

(a) T 中传递三角形的数目为：$\sum\limits_{i=1}^{v} S_i(S_i-1)/2$；

(b) T 中有 3-有向圈的数目 $t(v,3)$为：

$$t(v,3) \leqslant \begin{cases} (v^3-v)/24 & \text{当 } v\equiv 1 \pmod 2 \\ (v^3-4v)/24 & \text{当 } v\equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

(F.Harary 和 B.Moser)

证：(*a*) 考察顶点 v_i，它的出度为 S_i，于是由它作为传递三角形中出度为 2 的顶点，一共能产生 $S_i(S_i-1)/2$ 个传递三角形。故(*a*)成立。

(*b*) $t(v,3)=\binom{v}{3}-T$ 中传递三角形的数目。所以

$$t(v,3)=\binom{v}{3}-\sum_{i=1}^{v}S_i(S_i-1)/2=\binom{v}{3}+\frac{1}{4}v(v-1)$$

$-\sum_{i=1}^{v}S_i^2/2$。经简单的极值计算，知(*b*)成立。

10.4 工作排序问题

问题：工作 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 都必须在同一机器上进行，设 J_i 到 J_j 的机器调整时间为 t_{ij}。求一排序，使得 $\sum t_{ij}$ 为最小。

工作排序问题的解显然和旅行售货员问题相关，故没有好算法，下面介绍的算法仅仅是一个得到比较好的求解的方法。

1． 构造有向图 D：$V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，当且仅当 $t_{ij}\leqslant t_{ji}$ 时，$(v_i,v_j)\in A(D)$；

2． 求出 D 中一条有向 Hamilton 路 P(具体求法见习题 10.4.1)，并将这些工作按 P 中顺序来排序。

10.4.1 借助习题 10.2.3 描述一个在竞赛图中求有向 Hamilton 路的好算法。

解：下面算法第 0 步至第 5 步是求一条极大有向路，由此继续利用习题 10.2.3 可作第 6 步至第 9 步，求出一条有

向Hamilton路。

第0步：任取$u_0\in V$，置$U=\{u_0\}$，$i=0$；

第1步：若$N_D^+(u_i)\cap(V\setminus U)\neq\Phi$，任取$u_{i+1}\in N_D^+(u_i)\cap(V\setminus U)$置$U\leftarrow U\cup\{u_{i+1}\}$，转第2步；否则，转第3步；

第2步：若$i=\nu-1$，停；否则，$i\leftarrow i+1$，转第1步；

第3步：$j=0$，转第4步；

第4步：若$N_D^-(u_{-j})\cap(V\setminus U)\neq\Phi$，任取$u_{-(j+1)}\in N_D^-(u_{-j})\cap(V\setminus U)$。置$U\leftarrow U\cap\{u_{-(j+1)}\}$，转第5步；否则，转第6步；

第5步：若$i+j=\nu-1$，停；否则，$j\leftarrow j+1$，转第4步。

第6步：任取$v\in V\setminus U$，置$U\leftarrow U\cup\{v\}$，$k=i$，转第7步。

第7步：若$(u_{k-1},v)\in A(D)$，则，对$p=k,\cdots,i$，置$u_{p+1}\leftarrow u_p$，$u_k\leftarrow v$，$i\leftarrow i+1$，转第9步；否则，转第8步。

第8步：$k\leftarrow k-1$，转第7步。

第9步：若$i+j=\nu-1$，停；否则，转第6步。

这个算法结果得Hamilton有向路为：

$$(u_{-j},u_{-(j-1)},\cdots,u_{-1},u_0,u_1,\cdots,u_i)$$

算法的计算量主要在第1、4、7各步中，第1、4步的运算次数均不超过$\nu(\nu-1)$，第7步不超过$k\nu$，且它最多循环ν次，故是好算法。

10.4.2 举例说明，用上述方法得到的工作排序可以是远非最优的。

解：取本节原书中的例，设工作J_1，J_2，…，J_6间的调整时间为：

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
J_1	0	5	3	4	2	1
J_2	1	0	1	2	3	2
J_3	2	5	0	1	2	3
J_4	1	4	4	0	1	2
J_5	1	3	4	5	0	5
J_6	4	4	2	3	1	0

从下述极大有向路$P=(J_3,J_5,J_2,J_4,J_6)$开始，得到一条有向Hamilton路(J_3，J_5，J_2，J_4，J_1，J_6)，其调整时间为9。但是，最优解是有向Hamilton路(J_2，J_3，J_4，J_1，J_6，J_5)，它的调整时间为5。

10.5 高效率计算机磁鼓的设计

设计方法：定义有向图D_n，使其顶点是$n-1$位二进制数$p_1p_2\cdots p_{n-1}$，当且仅当$(p_1p_2\cdots p_{n-1},p_2p_3\cdots p_n)\in A(D_n)$；对弧$(p_1p_2\cdots p_{n-1},p_2p_3\cdots p_n)$给以标记$p_1p_2\cdots p_n$。取$D_n$的一个有向Euler游历，并将此游历各弧的第一个数码排序作为鼓面的设计即可。

10.5.1 求一个含有7个0和7个1的循环序列，使得所有4位二进制数除0000和1111外，都作为这个序列的一段而出现。

解： 如本节的例，除去弧a_1与a_5后各弧的第一数码序列，即14位二元序列00011100101101，就满足要

求。

10.5.2 设 S 是 n 个字母的字母表，证明：有一个包含每个字母 n^3 次的循环序列，使得由 S 中每 4 个字母构成的"字"，都出现在序列的一段中。

证：分两步：

1. 构造有向图 D，顶点是 S 中的任意三个字母，当且仅当 $(p_1p_2p_3, p_2p_3p_4)\in A(D)$。这样，每条弧都对应 S 中的四个字母所组成的字。

2. 易知 D 是连通的，且 $d^+(v)=d^-(v)=n$，$\forall v\in V(D)$，于是 D 包含一条有向 Euler 游历。考察按 Euler 游历依次取每条弧的第一个字母作成的循环序列。由于 $|V(D)|=n^3$，$|A(D)|=n^4$ 和各字母地位的对称性知，在所取的循环序列中，每个字母均出现了 n^3 次，且每 4 个字母构成的字即 D 中的一条弧，均出现在循环序列的一段中。

10.6 单向道路系统的构造

定理 10.5 (Nash-Williams定理) **$2k$-边连通图 G 均有 k-弧连通的定向。**

10.6.1 考察 Petersen 图，证明下述命题是错误的：对每个图都有一个定向，使得对每个 $S\subseteq V$，$(S,\bar{S})$ 和 $(\bar{S},S)$ 的基数差的绝对值最多为 1。

证：若 Petersen 图有这样的定向，易知，这种定向下，它的每个顶点或入度为 2 或出度为 2，再由练习 10.1.2 知，这两种点均各有 5 个，任取 2 个入度为 2 的不相邻的点组

或 S，必有 $||(S,\bar{S})|-|(\bar{S},S)||=2>1$，矛盾！故命题是错误的。

10.6.2 (*a*) 证明 Nash-Williams 定理等价于下述命题：若 G 的每个割集至少有 $2k$ 条边，则存在 G 的一个定向，它的每个割集在各自的方向上至少有 k 条弧。

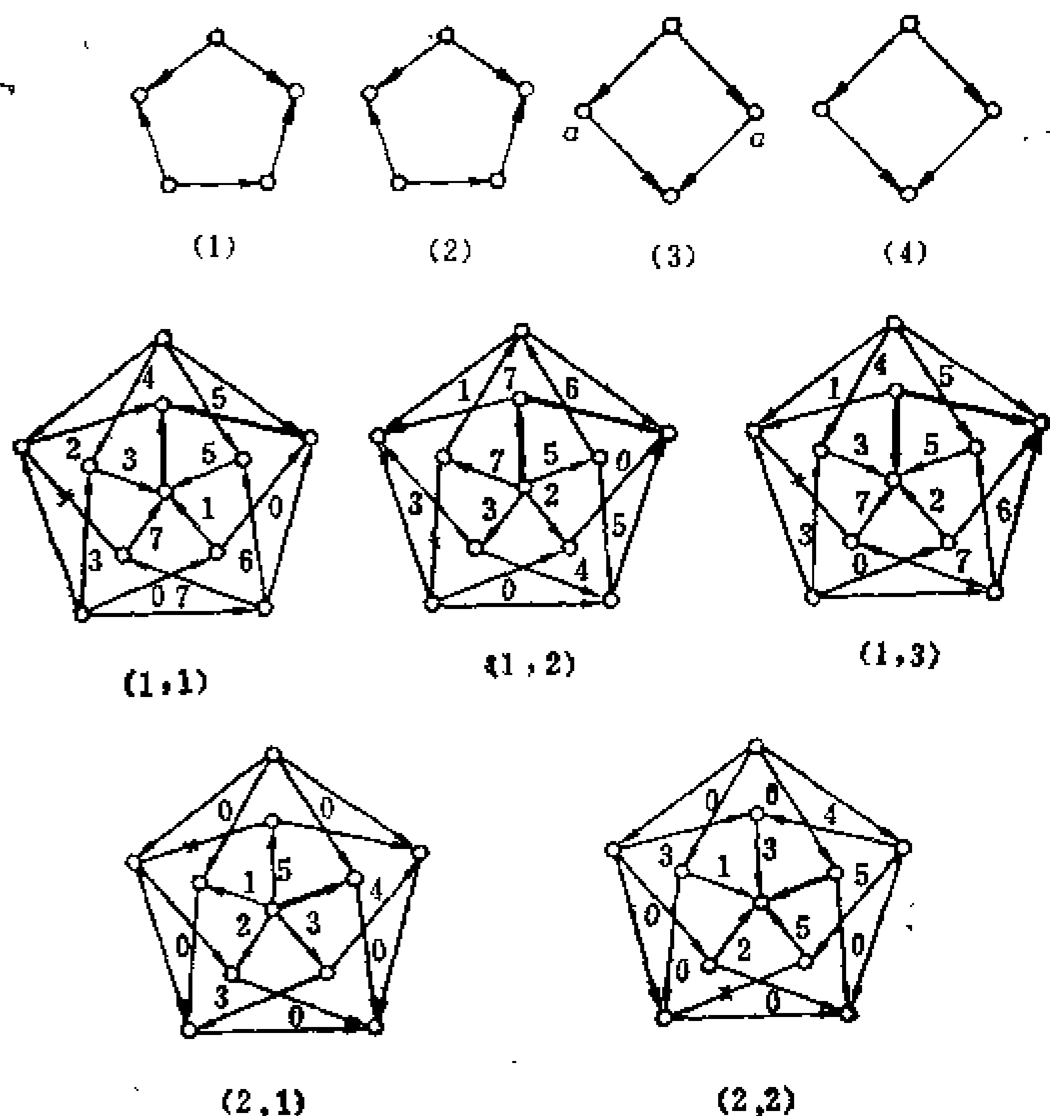
(*b*) 考察 Grötzsch 图，证明类似于 Nash-Williams 定理的下述命题是错误的：若 G 的每个圈至少有 $2k$ 条边，则存在 G 的一个定向，它的每个圈在各自的方向上至少有 k 条弧。

证：(*a*) 由于 G 是 $2k$-边连通的充要条件是 G 的任意割集至少有 $2k$ 条边。再由 k-弧连通的定义，知它们是等价的。

(*b*) 用反证法，若 Grötzsch图 G 存在满足所述命题的结论的定向，则对 G 中 C_4，C_5 圈中各方向都至少有两条弧，从而对 G 的最外面的五边形，在考虑到图形的对称性，仅有如图(1)、(2)两种定向，而对 G 中的 C_4 亦仅有如图(3)、(4)两种定向。

特别值得注意的是 C_4 中 a-型点是成对出现，且它们在 C_4 中不相邻，这一点在下面穷举过程中不断地用到。

下面我们对图(1)、(2)的情况穷举，图(1,1)-(2,2)中弧边上出现的数字，是依次由 C_4 的性质确定 G 中边的定向的顺序，粗边弧是穷举过程中的假定定向，G 中带"×"的边是无法定向之边。从而最后引出矛盾。所以 Grötzsch 图不存在在满足所述命题的结论中的定向，故(*b*)得证。



10.6.2 (*b*) 图

10.7　比赛参加者的名次评定

问题：如何决定循环赛中参加者的名次。

下面介绍的是 T.H.Wei 和 M.G.Kendall 提出来的排名次的方法：

1. 构造有向图 D，以参加者为 D 的顶点，$(v_i, v_j) \in$

$A(D)$的充要条件是 v_i 胜v_j。

2. 在四个以上顶点的每个有向连通分支上，依邻接矩阵求出绝对值最大的特征值所对应的特征矢量。按特征矢量分量的大小，依次定出该分支的参加者的名次；

对三个顶点的有向连通分支的参加者名次并列。

3. 将所有有向连通分支排定次序

$$D_1, D_2, \cdots, D_m$$

使得：$i<j$ 当且仅当一端在 D_i 另一端在 D_j 的所有弧，其头均在 D_j 中。

这样即得一种比赛参加者的名次排定。

10.7.1 将 10.7 节所述排名次方法用于

(a) 如图所示的 4 个竞赛图；

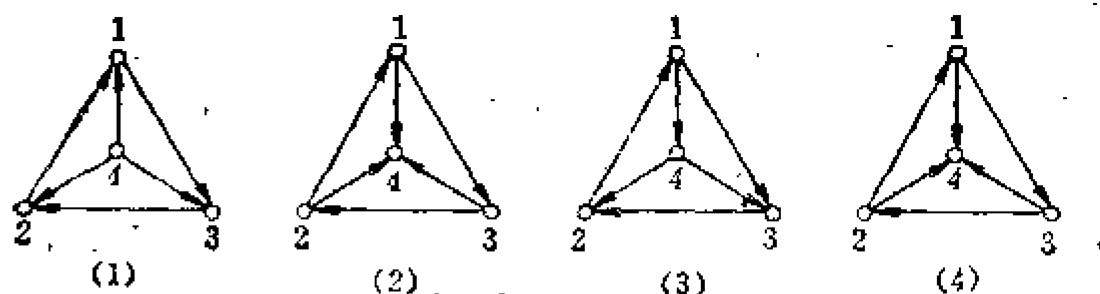
(b) 如下邻接矩阵的竞赛图：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
E	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
G	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
H	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
I	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
J	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0

解：(a) 4 个竞赛图如10.7.1(a)图。

图(1)的 $D_1=D[\{4\}]$，$D_2=[\{1,2,3\}]$；故名次为"4"第一，"1"，"2"，"3"并列第二；

图(2)的 $D_1=D[\{1,2,3\}]$，$D_2=[\{4\}]$；故名次为"1"，



10.7 1 (a) 图

"2"，"3"并列第一，"4"第二。

图(3)是有向连通的，其邻接矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

特征方程是 $\lambda^4-2\lambda-1=0$，其绝对值最大的特征值 $\lambda\approx 1.4$，相应的特征矢量为 $(1, 0.714, 0.51, 0.874)$，故名次为："1"，"4"，"2"，"3"。

图(4)有4个有向连通分支，排序如下：$D_1=D[\{1\}]$，$D_2=D[\{4\}]$，$D_3=D[\{3\}]$，$D_4=D[\{2\}]$；故名次排列为"1"，"4"，"3"，"2"。

(b) 由邻接矩阵可知，D 有如下几个有向连通分支：$D[\{C\}]$，$D[\{H\}]$，$D[\{B,E,F,I\}]$，$D[\{D\}]$，$D[\{A,G,J\}]$；这些分支应如下排序：

$D_1=D[\{H\}]$，$D_2=D[\{A,G,J\}]$，$D_3=D[\{D\}]$，$D_4=D[\{B,E,F,I\}]$，$D_5=D[\{C\}]$。其中4顶点以上的分支只 D_4 一个。注意到 D_4 中顶点 $\{F,B,E,I\}$ 依次与(a)

中(3)图 D 的顶点{1,2,3,4}相对应时，$D_4 \cong D$。故 D_4 各顶点名次应为："F"，"I"，"B"，"E"。于是 D 中各参加者名次如下：

"H"第一，"A"，"G"，"J"并列第二，"D"第三，"F"第四，"I"第五，"B"第六，"E"第七，"C"第八。

10.7.2 排名次的另外一个方法是考虑"失分矢量"来代替得分矢量。

(a) 证明：这相当对竞赛图的逆来排名次，然后把所求得的名次倒过来。

(b) 考虑4个顶点以上的有向连通竞赛图，证明排名次的两种方法，未必得到相同结果。

证：(a) 因 D 的得分矢量 S 是各顶点的出度，故 D 的失分矢量 S^* 是各顶点的入度，从而它是 D 的逆 $\overleftarrow{D}$ 的得分矢量。故按 S^* 在 $\overleftarrow{D}$ 上求出的名次是其得分大小顺序，也是 D 上的失分大小顺序。由于失分愈多，应名次愈后，故依 $\overleftarrow{D}$ 上得分失量求出的名次倒过来即为 D 上的名次排序。

(b) 比如练习 10.7.1(a)中的(3)图，记为 D。当 D 中顶点{1,2,3,4}依次与 $\overleftarrow{D}$ 中顶点{2,1,4,3}对应时，易验证：$\overleftarrow{D} \cong D$。于是 $\overleftarrow{D}$ 上按得分矢量排的名次为："2"，"3"，"1"，"4"；把它倒过来是"4"，"1"，"3"，"2"；便是 D 上失分矢量排的名次。显然，这与练习10.7.1(a)中的结果："1"，"4"，"2"，"3"不同。

第十一章 网 络

11.1 流

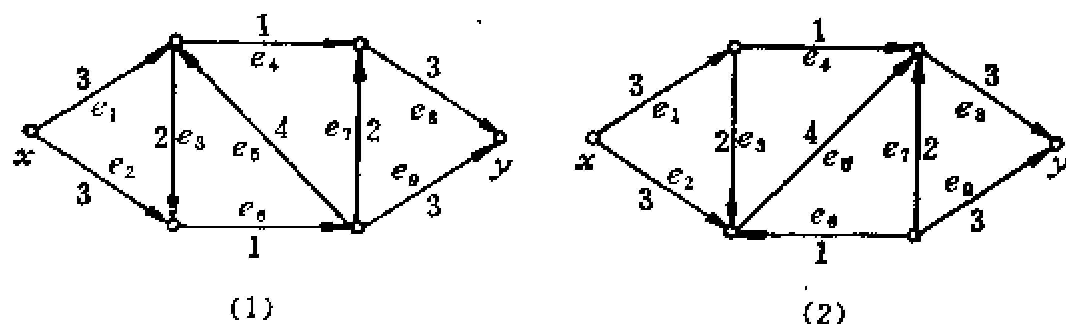
定义：**网络** N 是指下述的有向图 D，它具有两个非空的不相交的顶点子集 X、Y，以及定义在 $A(D)$上的一个取非负整数值的函数 c，称 X 中的顶点为 N 的**发点**(或**源**)，Y 中的顶点为 N 的**收点**(或**汇**)，称其它的顶点为**中间顶点**，记为 $I=V(D)\setminus\{X\cup Y\}$。$c$ 称为N的**容量函数**。它在弧 a 上的值 $c(a)$称为 a 的**容量**。

定义：网络 N 中，在 A 上定义一个整实值函数 f，它满足：(1) 容量约束条件：$0\leqslant f(a)\leqslant c(a)$，对 $\forall a\in A$；(2) 守恒条件：$f^-(v)=f^+(v)$，对 $\forall v\in I$；则称 f 是 N 中的一个**流**。若 $f_0\equiv 0$，对 $\forall a\in A$，则称 f_0 为**零流**。

定义：若 f 是 N 上的一个流，称 $f^+(X)-f^-(X)$为f的**值**，记为 $\mathrm{val}f$。若 N 中不存在流 f'，满足 $\mathrm{val}f'>\mathrm{val}f$，则称流 f为 N 中的**最大流**。

(网络流理论是图论中极重要的一个分支。它提供了图论中十多个著名结果的新证明。同时它还有极为广泛的应用。读者可参阅L.R.Ford, Jr., and D.R. Fulkerson 著的《Flows in Networks》(1962)和陈树柏主编的《网络图论及其应用》。)

11.1.1 对下列的网络确定所有可能的流和最大流。



11.1.1图

解：对网络(1)，(2)分别列表表示其所有可能的流，值最大者即为该网络的最大流，不再另外标明。

网络(1)的流如下：

流 \ 弧	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	流的值
$f_{0,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$f_{0,2}$	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
$f_{1,1}$	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
$f_{1,2}$	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
$f_{1,3}$	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
$f_{1,4}$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$f_{1,5}$	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
$f_{1,6}$	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
$f_{1,7}$	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
$f_{2,1}$	2	0	1	1	0	1	1	2	0	2
$f_{2,2}$	2	0	1	1	0	1	0	1	1	2
$f_{2,3}$	1	1	0	1	0	1	1	2	0	2
$f_{2,4}$	1	1	0	1	0	1	0	1	1	2

故网络(1)共有13个可能的流；有4个最大流，其值为2。

网络(2)的流如下：

弧 流	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	流的值
$f_{0,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$f_{1,1}$	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$f_{1,2}$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$f_{1,3}$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
$f_{2,1}$	2	0	2	0	2	0	0	2	0	2
$f_{2,2}$	2	0	1	1	1	0	0	2	0	2
$f_{2,3}$	1	1	1	0	2	0	0	2	0	2
$f_{2,4}$	1	1	0	1	1	0	0	2	0	2
$f_{2,5}$	0	2	0	0	2	0	0	2	0	2
$f_{3,1}$	3	0	2	1	2	0	0	3	0	3
$f_{3,2}$	2	1	2	0	3	0	0	3	0	3
$f_{3,3}$	2	1	1	1	2	0	0	3	0	3
$f_{3,4}$	1	2	1	0	3	0	0	3	0	3
$f_{3,5}$	1	2	0	1	2	0	0	3	0	3
$f_{3,6}$	0	3	0	0	3	0	0	3	0	3

故网络(2)共有 15 个可能的流；有 6 个最大流，其值为 3 。

11.1.2 证明对 N 中任一流 f 及任一 $S\subseteq V$ 均有，

$$\sum_{v\in S}(f^+(v)-f^-(v))=f^+(S)-f^-(S)$$

（注意，一般情况 $\sum_{v\in S}f^+(v)\neq f^+(S)$，$\sum_{v\in S}f^-(v)\neq f^-(S)$。）

证：若 v_1，$v_2\in S$，$(v_1,\ v_2)\in A(D)$，则在 $f^+(v_1)$ 中含 $f((v_1,\ v_2))$，$f^-(v_2)$中也含 $f((v_1,\ v_2))$，故 f 对 $(v_1,\ v_2)$这种弧在 $\sum_{v\in S}(f^+(v)-f^-(v))$ 中不产生影响，故 $\sum_{v\in S}(f^+(v)-f^-(v))=f(S,\bar{S})-f(\bar{S},S)=f^+(S)-f^-(S)$。

11.1.3 证明对 N 中的任一流 f，从 X 流出的合成流等于进入 Y 的合成流。

证：由练习11.1.2，若取 $S=V$，则 $\bar{S}=\Phi$，故有 $\sum\limits_{v\in V}(f^+(v)-f^-(v))=0$，另由流的守恒条件对 I 中的顶点 v，有 $f^+(v)-f^-(v)=0$，于是 $\sum\limits_{v\in V}(f^+(v)-f^-(v))=\sum\limits_{v\in X}(f^+(v)-f^-(v))+\sum\limits_{v\in Y}(f^+(v)-f^-(v))=(f^+(X)-f^-(X))+(f^+(Y)-f^-(Y))=0$，即成立 $f^+(X)-f^-(X)=f^-(Y)-f^+(Y)$。按定义 $f^+(X)-f^-(X)$ 是从 X 流出的合成流，而 $f^-(Y)-f^+(Y)$ 是进入 Y 的合成流。故命题成立。

11.1.4 设 N 是一个给定的网络，构作新网络 N' 如下：在 N 中添加两个新顶点 x，y；且添加以 x 为尾，X 中每一顶点为头的新弧，以及 Y 中每一顶点为尾，y 为头的新弧，这些新弧容量均为 ∞，这样的网络 N' 具有单一发点 x 和单一收点 y。

若 f 是 N 中的流，定义 N' 中弧的函数 f' 如下：

$$f'(a)=\begin{cases} f(a) & \text{若 } a \text{ 是 } N \text{ 的弧} \\ f^+(v)-f^-(v) & \text{若 } a=(x,\ v) \\ f^-(v)-f^+(v) & \text{若 } a=(v,\ y) \end{cases}$$

证明：(a) 函数 f' 是 N' 中的一个流，且 $\text{val}f'=\text{val}f$；

(b) N' 中的流限制在 N 的弧集上是一个 N 中具有相同值的流。

证：(a) 由 f' 定义知，对于 N' 的中间顶点满足守恒条件，对于 N 中的弧 a，由于 $0\leqslant f(a)=f'(a)\leqslant c(a)$，$N'$ 中与 x，y 关联的弧，由于其容量为 ∞，容量约束条件恒成立，故按流的定义 f' 是 N' 中的流。

又 $\mathrm{val}f=f^+(X)-f^-(X)$，由练习11.1.2知，$\mathrm{val}\,f=\sum\limits_{v\in X}(f^+(v)-f^-(v))=\sum\limits_{v\in X}f'((x,y))=f'^+(x)-f'^-(x)=\mathrm{val}f'$。

(b) 显然由定义知，N'中的流 f' 限制在 N 的弧集上时，对 N 讲守恒条件及容量约束条件均满足。它是 N 上的流，且由(a)知，$\mathrm{val}f'=\mathrm{val}f$。故命题成立。

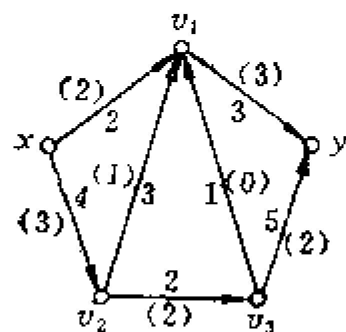
11.2 截

定义：设 N 是一个具有一个发点 x，一个收点 y 的网络，又 $x\in S$，$y\in \bar{S}$，则称$(S, \bar{S})$为 N 中的**截**。截 K的容量 $\mathrm{cap}K=\sum\limits_{a\in K}c(a)$。若 N 中不存在截K'，满足 $\mathrm{cap}\,K'<\mathrm{cap}K$，则称截 K 为 N 中的最小截。

定义：f 是网络的一个流。若$f(a)=c(a)$，称 a 是**f-饱和的**，否则称 **f-未饱和的**。若 $f(a)=0$，称 a 是 **f-零的**，否则称 **f-正的**。

引理11.1 对 N 中任一流 f 和任一截 $(S, \bar{S})$，恒有 $\mathrm{val}f=f^+(S)-f^-(S)$。

定理11.1 N 中任一流 f 和任一截 $K=(S, \bar{S})$ 有 $\mathrm{val}f\leqslant\mathrm{cap}K$，且等式成立的充要条件是$(S, \bar{S})$中每条弧均$f$-饱和，$(\bar{S}, S)$中每条弧均是$f$-零。



11.2.1图

系11.1 设 f 是 N 中的流，K 是 N 的截，且 $\mathrm{val}f=\mathrm{cap}K$，则 f 是 N 的最大流，K是 N 的最小截。

11.2.1 在如图所示网络中：

(a) 确定所有的截；

(b) 求最小截的容量；

(c) 证明(　)中所给出的流是最大流。

解：(a) 列表表示所示网络的所有截：

S	截 $K=(S,\bar{S})$	K 的容量
x	xv_1, xv_2	6
x, v_1	xv_2, v_1y	7
x, v_2	xv_1, v_2v_1, v_2v_3	7
x, v_3	xv_1, xv_2, v_3v_1, v_3y	12
x, v_1, v_2	v_1y, v_2v_3	5
x, v_1, v_3	xv_2, v_1y, v_3y	12
x, v_2, v_3	xv_1, v_2v_1, v_3v_1, v_3y	11
x, v_1, v_2, v_3	v_1y, v_3y	8

(b) 由(a)中之表所示，网络的最小截为 $\{v_1y, v_2v_3\}$，其容量为 5 。

(c) 首先，(　)中给出的数字，易验证是一个流。它的值为 5 ，等于(b)中算出的最小截容量，于是由系 11.1 知，它是最大流。

11.2.2 证明若 N 中不存在有向(x, y)-路，则最大流之值和最小截的容量均等于 0 。

证：令 $S=\{v|$在 N 中存在(x, v)-有向路$\}$。显然 $x\in S$，又由条件知在 N 中不存在(x, y)-有向路，故 $y\in\bar{S}$；$(S, \bar{S})=\varPhi$，截 $K=(S, \bar{S})$的容量为 0，又显然零流 f_0的值 $\mathrm{vol}f_0=0$，于是 $\mathrm{vol}f_0=\mathrm{cap}K$，由系 11.1 知结论成立。

11.2.3 若$(S, \bar{S})$和$(T, \bar{T})$都是N的最小截，证明：$(S\cup T, \overline{S\cup T})$和$(S\cap T, \overline{S\cap T})$均为$N$的最小截。

证：由集合的运算和容量的定义，可直接验证下式成立：

$\text{cap}(S\cup T, \overline{S\cup T}) \leqslant \text{cap}(S, \bar{S}) + \text{cap}(T, \bar{T}) - \text{cap}(S\cap T, \overline{S\cap T})$。

另一方面，由于$(S, \bar{S})$，$(T, \bar{T})$均是最小截，故有：

$\text{cap}(S, \bar{S}) \leqslant \text{cap}(S\cup T, \overline{S\cup T})$ 和 $\text{cap}(T, \bar{T}) \leqslant \text{cap}(S\cap T, \overline{S\cap T})$。

从而有：$\text{cap}(S\cup T, \overline{S\cup T}) = \text{cap}(S, \bar{S})$和$\text{cap}(S\cap T, \overline{S\cap T}) = \text{cap}(S, \bar{S})$。

故，$(S\cup T, \overline{S\cup T})$，$(S\cap T, \overline{S\cap T})$均是$N$的最小截。

11.3 最大流最小截定理

定义：设f是网络中的流，对于N中的每一条路P，定义如下非负整数$l(P) = \min_{a\in A(P)} l(a)$，其中

$$l(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & a\text{ 为 }P\text{中顺向弧}, \\ f(a) & a\text{ 为 }P\text{中逆向弧}. \end{cases}$$

当$l(P) = 0$时，称P是**f-饱和的**。$l(P) > 0$，称P是**f-未饱和的**。若P是由发点x到收点y的一条f-未饱和路，则称P为**f-增大路**。

定理11.2 流f是网络N的最大流的充要条件是N中不含f-增大路。

定理11.3 (Ford-Fulkerson定理) 任一网络中，最大

流的值等于最小截的容量。

求单一发点单一收点网络最大流的标号法如下：

对任给流 f，将发点 x 标号为 $l(x)=\infty$。

1. 若 a 是 f-未饱和弧，其尾 u 已标号，其头 v 未标号，则 v 标号为 $l(v)=\min\{l(u),\ c(a)-f(a)\}$。

2. 若 a 是 f-正的，其头 u 已标号，其尾 v 未标号，则 v 标号为 $l(v)=\min\{l(u),\ f(a)\}$。

经上述标号，v 称为基本 u 被标号。所有基于 u 可被标号的顶点 v 全被标号后，u 称为已查顶点。这个标号过程一直进行到或者收点 y 被标号(称为突破)，则得 f-增大路，可改进流，对新的流重新标号；或者收点 y 未被标号前，所有标号点都成已查点了，无法再标下去(称为截断)，这时不含 f-增大路，已得最大流。

11.3.1 设 f 是网络中的流，P 为 f-增大路，令

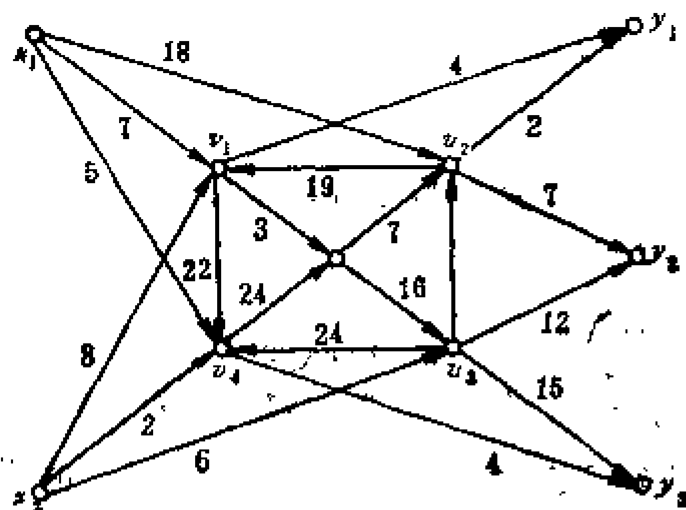
$$\hat{f}(a)=\begin{cases} f(a)+l(P) & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的顺向弧.} \\ f(a)-l(P) & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的逆向弧} \\ f(a) & \text{其它} \end{cases}$$

证明 $\hat{f}$ 是满足 $\mathrm{val}\,\hat{f}=\mathrm{val}\,f+l(P)$ 的流。

证：由于 $l(P)=\min\limits_{a\in A(P)} l(a)$，其中 $l(a)=c(a)-f(a)$ (当 a 为 P 中顺向弧) $l(a)=f(a)$，(当 a 为 P 中逆向弧) 于是由 $\hat{f}$ 的定义知，当 a 为 P 中顺向弧时，$l(P)\leqslant l(a)=c(a)-f(a)$，所以 $c(a)\geqslant f(a)+l(P)=\hat{f}(a)\geqslant 0$；而当 a 为 P 中的逆向弧时，$l(P)\leqslant l(a)=f(a)$，所以 $0\leqslant f(a)-l(P)=\hat{f}(a)\leqslant f(a)\leqslant c(a)$，故定义在 A 上的 $\hat{f}$ 满足流的容量约束条

件。今考虑 $v\in I$，若 $v\notin P$，则显然 $\hat{f}^+(v)=\hat{f}^-(v)$。若 $v\in P$，且 P 中和 v 关联的两弧 a，b 同向，故 $\hat{f}(a)-\hat{f}(b)=f(a)-f(b)$，而此时，$a$，$b$ 对 v 来讲恰是一条入弧、一条出弧，所以此时仍有 $\hat{f}^+(v)=\hat{f}^-(v)$。若 $v\in P$ 且 P 中和 v 关联的两弧 a，b 异向，故 $\hat{f}(a)+\hat{f}(b)=f(a)+f(b)$，而此时 a，b 对 v 来讲或均是入弧或均是出弧，所以 $\hat{f}^+(v)=\hat{f}^-(v)$。综合上述 $\hat{f}$ 满足流的守恒条件，故 $\hat{f}$ 是 N 上的一个新的流。对于流 $\hat{f}$，若 P 和 x 相关联之边记为 e，e 是 x 的出弧，即 e 是 P 的顺向弧，于是按定义 $\mathrm{val}\hat{f}=\hat{f}^+(x)-\hat{f}^-(x)=(f^+(x)+l(P))-f^-(x)=f^+(x)-f^-(x)+l(P)=\mathrm{val}f+l(P)$；若 e 是 x 的入弧，即 e 是 P 的逆向弧，于是按定义 $\mathrm{val}\hat{f}=\hat{f}^+(x)-\hat{f}^-(x)=f^+(x)-(f^-(x)-l(P))=f^+(x)-f^-(x)+l(P)=\mathrm{val}f+l(P)$，故不论何种情况恒成立：$\mathrm{val}\hat{f}=\mathrm{val}f+l(P)$。

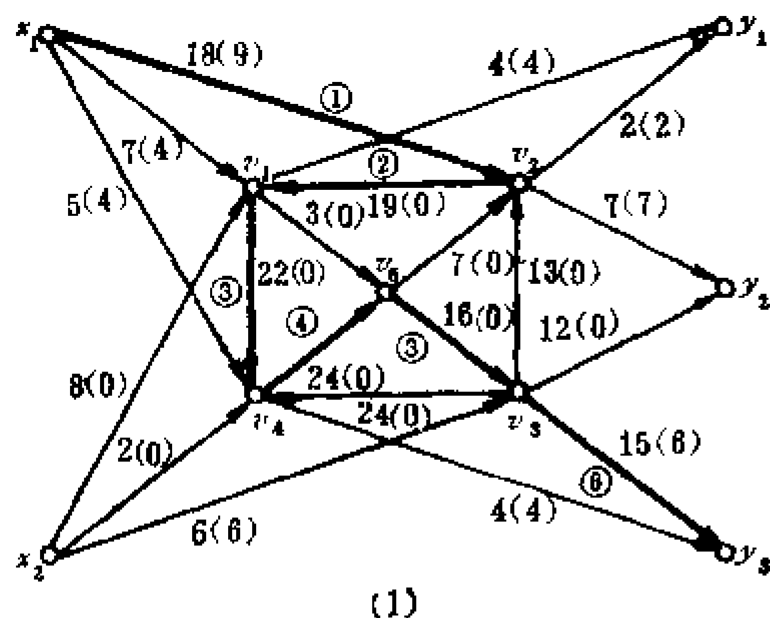
11.3.2 产品由工厂 x_1 和 x_2 生产，经下述网络运到市场 y_1、y_2 和 y_3，用标号法确定可以从工厂运到市场的



11.3.2 题图

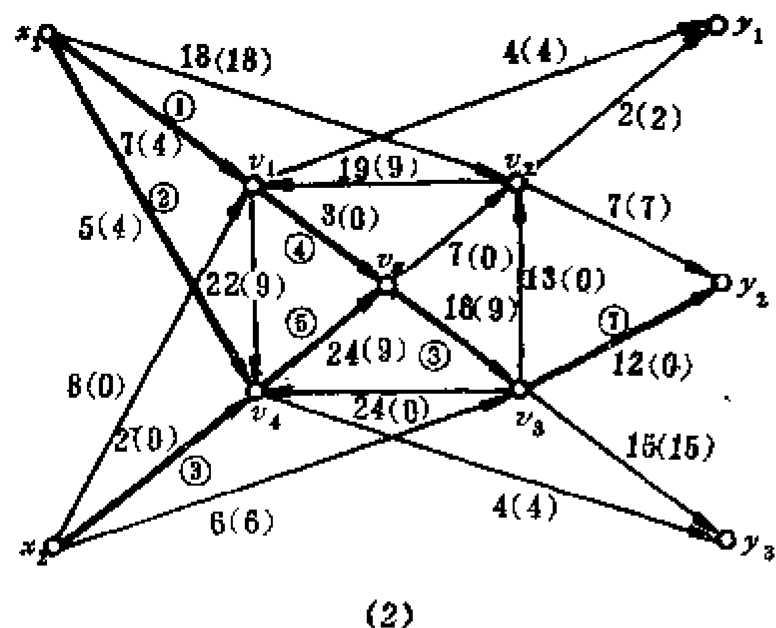
最大总量。

解：我们由网络的零流开始进行标号，极易得到图(1)所示的流，它们经过中间点到达市场。



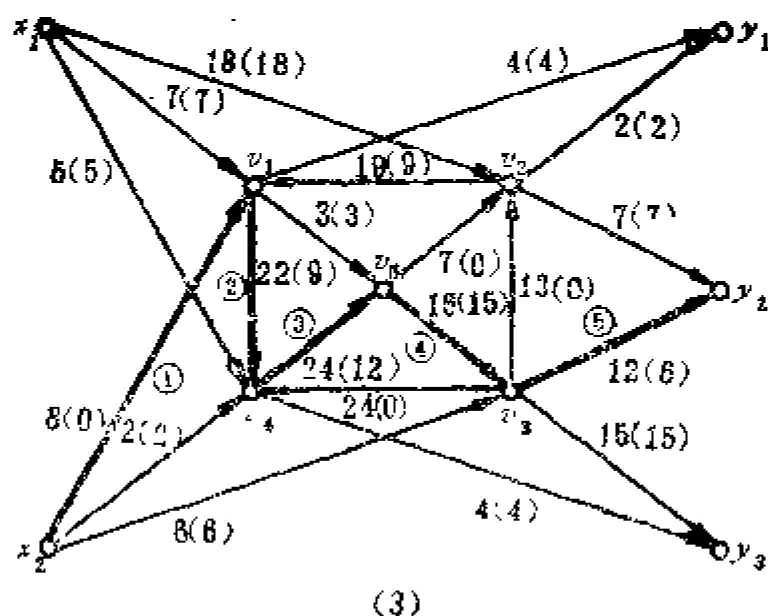
(1)

图(1)中弧旁(　)中的数字表示流在该弧的值。我们在图(1)上用标号法，粗弧旁○中的数字表示标号的次序，得图(2)中的修改流，并在这基础上进一步用标号法。



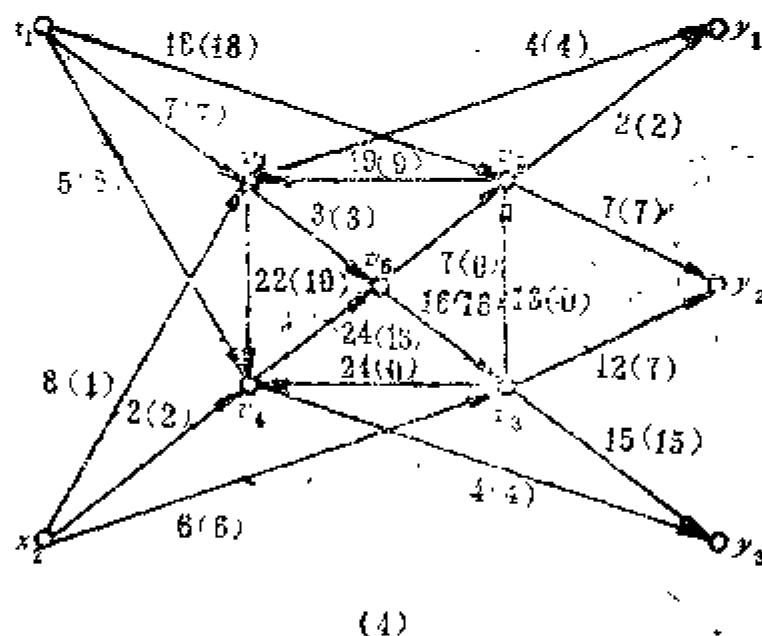
(2)

图(2)中为了方便将 3 条f-增大路合在一起，于是我们得图(3)的修改流，并在图(3)上用标号法。



(3)

图(3) 中有一条 f-增大路，在图(4)中表示它的修改流。



(4)

11.3.2 图

在图(4)中易验证已无f-增大路，于是由定理11.2知，图(4)中所示的流是网络的最大流，其值为39，即从工厂运到市场的最大总量为39。

11.3.3 证明在任一容量均为整数的网络N中，恒存在最大流f，它对任意$a\in A$的$f(a)$均为整数。

证：注意到在用标号法时，由练习11.3.1中$\hat{f}$的定义及$l(P)$是整数知，从N的零流开始逐次所得的修正流在任意弧上的值均为整数。这过程一直到N中的流不再存在f-增大路为止，这时这流记为f_M。由定理11.2，f_M是N的最大流，故f_M即为所求。

11.3.4 考虑网络N，它的每一条弧a均赋予一个整数$b(a)\leqslant c(a)$，修改标号法，求N中对$\forall a\in A$，满足约束条件$f(a)\geqslant b(a)$的最大流f(假定有一个初始流满足这条件)。

解：设f_0是满足题中条件的初始流，即对$\forall a\in A$，成立$0\leqslant b(a)\leqslant f_0(a)\leqslant c(a)$，又对$\forall v\in I$成立$f_0^+(v)=f_0^-(v)$。

对N中的每条路P定义非负整数$l(P)=\min\limits_{a\in A(P)}\{l(a)\}$，

其中
$$l(a)=\begin{cases}c(a)-f_0(a) & a\text{为}P\text{中顺向弧}\\ f_0(a)-b(a) & a\text{为}P\text{中逆向弧}\end{cases}$$

当$l(P)=0$时称P为f_0-饱和路。当$l(P)>0$则称P为f_0-未饱和路。当P为一条由发点x到收点y的f_0-未饱和路，则称P为f_0-增大路，这时我们可以定义P上的修改流$\hat{f}$如下：

$$\hat{f}(a)=\begin{cases}f_0(a)+l(P) & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的顺向弧}\\ f_0(a)-l(P) & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的逆向弧}\\ f_0(a) & \text{其它}\end{cases}$$

于是类似于练习11.3.1得 $\mathrm{val}\hat{f}=\mathrm{val}f_0+l(P)$，且易知 $\hat{f}$ 满足题中的约束条件，此外，类似地定义 N 中的 f_0-未饱和树 T，只不过未饱和的含意是本题所定义的。开始 T 仅由发点 x 组成，每一步均可按下述两种方法来增长树。

(i) 若在 $(S, \bar{S})$ 中存在 f_0-未饱和弧 a，其中 $S=V(T)$，则将 a 和它的头一起加入 T。

(ii) 若在 $(\bar{S}, S)$ 中存在一条 $f_0(a)-b(a)>0$ 的弧 a，则将 a 和它的尾一起加入 T。

若 T 最后增长到 y，则得 N 中的一条 f_0-增大路，可得到一个修改流 $\hat{f}$，将 $\hat{f}$ 看作初始流 f_0，继续这过程，直到 N 中不存在 f_0-增大路为止。此时 N 中的流记为 f，显然 f 满足题中条件。下面我们证明 f 是满足题中条件的最大流。首先考虑满足题中条件的任一流 f'，由于 $f'(a)\leqslant c(a)$，故对任意 S 有 $f'^+(S)\leqslant \mathrm{cap}(S, \bar{S})$，又由于 $b(a)\leqslant f'(a)$，所以 $f'^-(S)\geqslant \sum\limits_{a\in(\bar{S},S)} b(a)$。故由引理11.1，$\mathrm{val}\,f'=f'^+(S)-f'^-(S)\leqslant \mathrm{cap}(S, \bar{S})-\sum\limits_{a\in(\bar{S},S)} b(a)$，且易知仅当 $(\bar{S}, S)$ 中每条弧 a，$f'(a)$ 均为值 $b(a)$，$(S, \bar{S})$ 的每条弧均饱和时，上述等号成立。显然对 f，由于在 N 中无 f-增大路，若取 $S=V(T)$，则有 $\mathrm{val}f=\mathrm{cap}(S, \bar{S})-\sum\limits_{a\in(\bar{S},S)} b(a)$，所以 f 是满足题中条件的最大流。

根据以上分析，为求本题约束的最大流，可如下修改标号法：

对任给满足本题约束的流 f_0，将发点 x 标号为 $l(x)=\infty$。

1. 若 a 是 f_0-未饱和弧，其尾 u 已标号，其头 v 未标号，则 v 标号为 $l(v)=\min\{l(u),\ c(a)-f_0(a)\}$。

2. 若 a 是 $f_0(a)-b(a)>0$ 的弧，其头 u 已标号，其尾 v 未标号，则 v 标号为 $l(v)=\min\{l(u), f_0(a)-b(a)\}$。

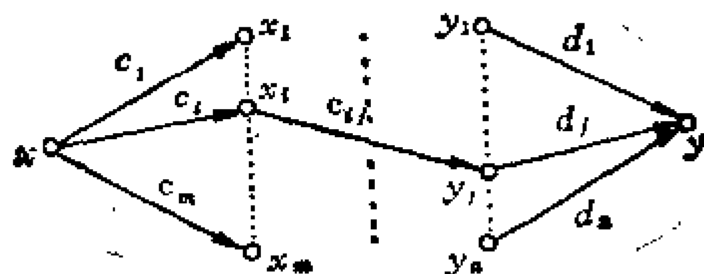
这标号过程一直进行到或者收点 y 被标号，则得 f_0-增大路与改进流 $\hat{f}$，对新流重新标号；或者出现截断，即得最大流。

11.3.5 考虑网络 N，其中的每一个中间顶点 v 都赋予一个非负整数 $m(v)$，说明如何修改网络使得能用标号法来求出对 $\forall v\in V\setminus\{x,\ y\}$ 均满足约束 $f^-(v)\leqslant m(v)$ 的最大流 f。

证：用定理 11.6 证明中由 D 构造 D' 的方法，从 N 构造新网络 N' 于下：将 $v\in V\setminus\{x,\ y\}$ 在 N' 中分成两顶点，并连以弧 $(v',\ v'')$，赋以 $m(v)$ 的容量；设 $u,\ v\in V\setminus\{x,\ y\}$，将 N 中弧 $(u,\ v)$、$(x,\ v)$、$(u,\ y)$，在 N' 中分别用弧 $(u'',\ v')$、$(x,\ v')$、$(u'',\ y)$ 来代替，并保持原弧的容量。若 N 中含弧 $(x,\ y)$，则在 N' 中仍保留弧 $(x,\ y)$ 和它的容量。今用标号法对 N' 求得最大流 f'，显然把 N' 中 $(v',\ v'')$ 收缩成一点 v 时，则 N' 变成 N，f' 则变成 N 中的最大流，记为 f，于是 $f^-(v)=f'^-(v')=f'^+(v')=f'((v',\ v''))\leqslant m(v)$，故 f 即为所求之 N 中最大流。

11.3.6 对 2-部图 $(X,\ Y,\ E)$，将 E 中之边换成自 X 到 Y 的弧，并赋以其容量，再增加新的顶点 x、y，分别作为收、发点，并对 $(x,\ X)$、$(Y,\ y)$ 弧赋以适当的容量。如

图所示，称为运输网络 N_T。



11.3.6 题图

试证：在 N_T 中存在饱和所有收弧 (Y, y) 流的充要条件是：

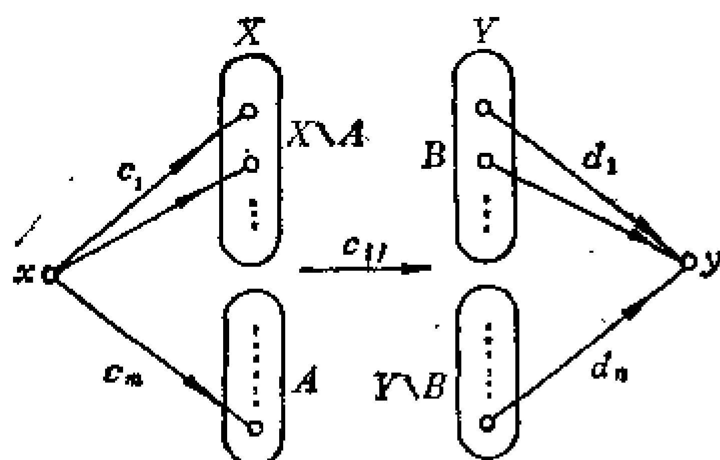
$$F(B)\geqslant d(B) \quad (\forall B\subseteq Y) \quad (*)$$

其中 $F(B)$ 是 N_T 可能送到 B 的最大流量，$d(B)$ 是 B 到收点 y 的总容量。 (D.Gale)

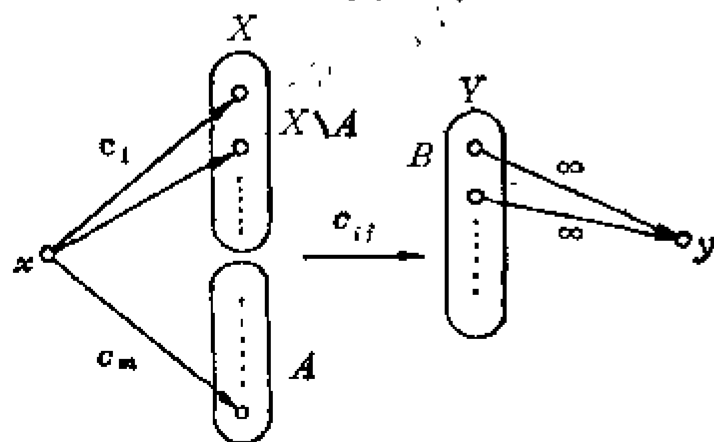
证：设 f^* 是 N_T 中的最大流，由定理 11.3 知，有 $\mathrm{val} f^*=\min\limits_{S}\ \mathrm{cap}(S,\bar{S})$，其中 $(x\in S,\ y\in\bar{S})$。暂时取定 $B\subseteq Y$，令 $\bar{S}=A\cup B\cup\{y\}$，其中 $A\subseteq X$，如图(1)所示。于是 $\min\limits_{S}\ \mathrm{cap}(S,\ \bar{S})=\min\limits_{A\subseteq X,B\subseteq Y}[c(x,A)+c(X\setminus A,B)+c(Y\setminus B,y)]=\min\limits_{B\subseteq Y}[\min\limits_{A\subseteq X}\{c(x,A)+c(X\setminus A,B)\}+c(Y\setminus B,y)]$。

由定理 11.3，对图(2)中 $\bar{S}$ 暂时取定后，所得的特殊部分网络的最大流量 $F(B)$，应等于 $\min\limits_{A\subseteq X}[c(x,A)+c(X\setminus A,B)]$。于是有 $\mathrm{val} f^*=\min\limits_{B\subseteq Y}[F(B)+c(Y\setminus B,\ y)]=c(Y,y)+\min\limits_{B\subseteq Y}[F(B)-c(B,\ y)]$。由于 $(Y,\ y)$ 是 N_T 中一个截，故饱和所有收弧的充要条件是 $\mathrm{val} f^*=c(Y,\ y)$。

即$\min\limits_{B\subseteq Y}[F(B)-c(B,y)]=0$，亦即$F(B)\geqslant c(B,y)$，$(B\subseteq Y)$



(1)



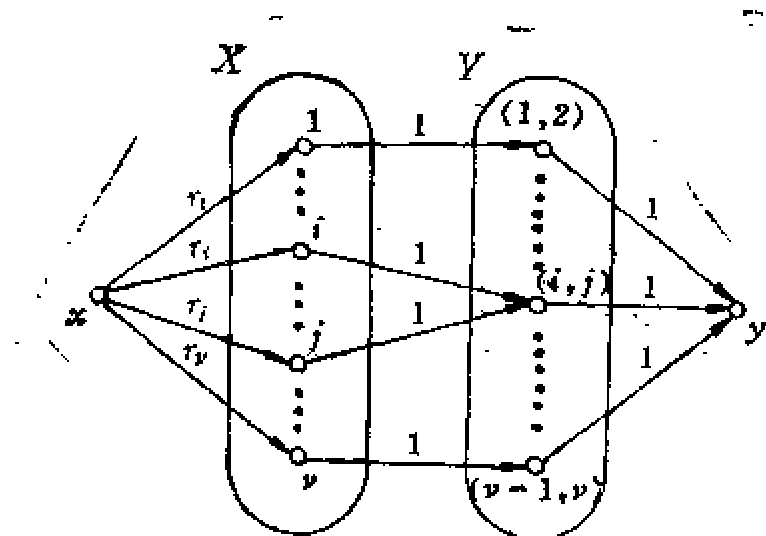
(2)

11.3.6 图

11.3.7 用练习11.3.6证明练习10.2.8。

证： 构作 N_T 如图。

图中 $Y=\{(i,\ j)\,|\,i<j,\ i,\ j=1,\ \cdots,\ v\}$。$N_T$ 是运输网络。易证对 N_T 来说，练习11.3.6中的式（$*$）等价于练习10.2.8中的条件(a)。另一方面收弧一共$\binom{v}{2}$条，且$\sum\limits_{i=1}^{v}r_i=\binom{v}{2}$，故饱和所有收弧的流，也一定饱和发弧。



11.3.7 图

而饱和 N_ν 收弧和发弧的流等价于在 X 上有一个竞赛图的实现，它的出度序列为$(r_1, r_2, \cdots, r_\nu)$。综合上述，故由练习 11.3.6 知，练习 10.2.8 成立。

11.4 Menger定理

Menger 定理是关于图的连通性和它的路之间的关系的一簇定理。这里仅列举定理 11.7 为例。

定理11.7 设 x, y 为 G 中两个不相邻的顶点。那么，G 中无公共内点的(x, y)-路的最大条数等于删去一些顶点后就使 G 中所有(x, y)-都遭破坏的最少的顶点个数。

系11.7 $\nu(\geqslant k+1)$个顶点的图 G 为 k-连通的充要条件是 G 中任意两个顶点至少有 k 条无公共内顶点的路所连通。

11.4.1 证明在定理 11.6 的证明中提到的命题：D 中

删去一些弧后，就使所有(x, y)-有向路都遭破坏的最少弧数，等于D中删去一些顶点后就使所有(x, y)-有向路都遭破坏的最少顶点数。

证：设S是D中破坏一切(x, y)-有向路的最小顶点集，$|S|=k$；K是D'中破坏一切(x, y)-有向路的最小弧集，$|K|=k'$，我们要证$k=k'$。

由D'的定义知，D中的点v对应D'中的弧(v', v'')，故D中S对应D'中的一个弧集K_S；由于$D-S$不连通，故$D'-K_S$也不连通，从而，K_S是破坏D'中所有(x, y)-有向路的一个弧集，于是，$k=|S|=|K_S|\geqslant|K|=k'$。

另一方面，若K中有一个(v_1'', v_2')形式的弧，可知，经过此弧的一切(x, y)-有向路，必经过弧(v_1', v_1'')，故将K中的(v_1'', v_2')用(v_1', v_1'')来代替，也仍是D中破坏一切(x, y)-有向路的最小弧集。所以，不妨设K中弧全具(v', v'')形式。同样由D'的定义，D'中这样的K对应D中一个破坏一切(x, y)-有向路的顶点集S_k，于是，$k'=|K|=|S_k|\geqslant|S|=k$，得证。

11.4.2 利用定理11.7推导König定理(5.3)。

证：不妨设G为连通的2-部图，$V=(X, Y)$，再给G加上两个顶点x和y，使x与X中的每一个顶点相连，y与Y中的每一个顶点相连得新图G'。则G中最大匹配数就是G'中的无公共内点的(x, y)-路的最大条数k。根据定理11.7，k等于破坏所有(x, y)-路的最小顶点集V'的基数。事实上V'是G的最小覆盖集；否则，有一条G的边e的两个端点不在V'中，由G'的定义知，$G'-V'$中还有一条(x, y)-路，这与V'的定义矛盾！从而定理得证。

11.4.3 设 G 是一个图，S 和 T 是 V 的两个不相交子集。证明，一个端点在 S，另一端点在 T 的点不相交的路的最大数目，等于删去后就会把 S 和 T 分离(即删去它们之后，没有分支同时包含 S 和 T 的顶点)的那些顶点的最小数目。

证：在 G 外增加两个顶点 x，y，且将 x 与 S 中的所有点相连，y 与 T 中的所有点相连。得一新图 G'。易知，G 的一端在 S 另一端在 T 的点不相交的路，与 G' 中无公共内点的 (x, y)-路一一对应。由定理 11.7知，这种 (x, y)-路的最大条数，等于 G' 中删去一些顶点就破坏一切 (x, y)-路的那些顶点的最小数目。设这些顶点组成集合为 V'。在 G 中删去 V'，必使 S，T 分离；因为否则 $G-V'$ 中有个分支同时包含 S 和 T 的顶点，从而 $G'-V'$ 中包含 (x, y)-路。矛盾！反之，若 $G-V'$ 使 S，T 分离，必然 $G'-V'$ 中不含 (x, y)-路。综合上述，故命题成立。

11.4.4 若 G 是 $k\geqslant 2$ 的 k-连通图，则 G 的任意 k 个顶点都必然在某个圈中。

证：由定理 3.2 知，$k=2$时，命题成立。假设 $k-1\geqslant 2$ 时命题成立。下面假定 G 是 k-连通。在 G 中任取 k 个顶点 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}\}$，故 $G_1=G-v_0$ 是 $k-1$-连通。由假设 $\{v_1, \cdots, v_{k-1}\}$ 在 G_1 中的某个圈 C_1 中。当然 C_1 中可能还有不同于 $v_i(i=1, \cdots, k-1)$ 的其它七个顶点。不妨设 v_i 在 C_1 中位置的排列顺序与它的下标相同，于是圈 C_1 被 v_i 分成 $k-1$ 个 $[v_i, v_{i+1}]$-闭段$(i=1, \cdots, k-1, v_k=v_1)$。再由 G 是 k-连通，故 v_0 在 G 中至少有 k 个邻点，其全体记为 $N(v_0)$，设 $|N(v_0)\cap V(C_1)| = p$。令：$S=N(v_0)\setminus$

$(N(v_0)\cap V(C_1)), T=V(C_1)\setminus(N(v_0)\cap V(C_1))$。显然，$S$，$T$不相交，且$|S|\geqslant k-p$，$|T|\geqslant k-1+t-p$。在$G$中删去一个顶点子集$V'$，使$S$，$T$分离(分离的定义见练习11.4.3)。若它不包含$S$或$T$，则因$G$是$k$-连通推，知必须$|V'|\geqslant k$。若$V'$包含$S$或$T$，则$V'$还可能是$S$或$T$，故使$S$，$T$分离的最小$V'$，记为$V'_0$，有：

$$|V'_0|\geqslant \min(k, k-p, k-p+t-1)=\begin{cases} k-p-1 & (\text{当}t=0) \\ k-p & (\text{当}t\geqslant 1) \end{cases}$$

由练习11.4.3知，S与T间点不相交的路有$|V'_0|$条。这些路从S延长一条边到v_0，即成为从v_0到T(即到C_1上某些点)的除v_0外其它顶点均不相交的路。分两种情况讨论：

(1) 当$t=0$时，从v_0到C_1有$p+(k-p-1)=k-1=|V(C_1)|$条除v_0外其它顶点均不交的路。任取两条(v_0, v_i)-和(v_0, v_{i+1})-路，则$C=C_1-v_iv_{i+1}+(v_0, v_i)$-路$+(v_0, v_{i+1})$-路，是$G$中包含$\{v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}\}$的一个圈。

(2) 当$t\geqslant 1$时，从v_0到C_1上有$p+(k-p)=k$条除v_0外其它顶点均不交的路。因C_1仅有k-1个$[v_i, v_{i+1}]$-闭段，于是必有两条路的端点同在某个$[v_{i_0}, v_{i_0+1}]$-闭段上，设这两端点为u_1，u_2，则：$C=C_1-$在C_1上的(u_1, u_2)-段$+(v_0, u_1)$-路$+(v_0, u_2)$-路是G中包含$\{v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}\}$的一个圈。由归纳法知，定理成立。

11.5 可行流

定义：设 N 为网络，假定对 N 的每一个发点 x_i 都指定一个非负整数 $\sigma(x_i)$，称为 x_i 处的**供应**，对 N 的每个收点 y_j 都指定一个非负整数 $\partial(y_j)$，称为 y_j 处的**需求**。N 的流 f 如果满足：

$$f^+(x_i)-f^-(x_i)\leqslant\sigma(x_i) \qquad x_i\in X$$

$$f^-(y_j)-f^+(y_j)\geqslant\partial(y_j) \qquad y_j\in Y$$

则称 f 是**可行流**。

定理11.8(D.Gale, 1957) 网络 N 中存在可行流的充要条件是对任意 $S\subseteq V$，都有

$$c(S,\ \bar{S})\geqslant\partial(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap\bar{S})$$

定义：设 $\mathrm{p}=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m)$和 $\mathrm{q}=(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n)$是两个非负整数序列。如果存在一个顶点划分为 $(\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m\},\ \{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\})$的2-部单图 G，使得

$$d(x_i)=p_i \qquad 1\leqslant i\leqslant m \quad 和$$

$$d(y_j)=q_j \qquad 1\leqslant j\leqslant n$$

则称偶(p,q)可用 2-部单图来实现。

定理 11.9 设 $\mathrm{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$和$\mathrm{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$是两个非负整数序列，且$\sum_{i=1}^{m}p_i=\sum_{j=1}^{n}q_j$，$q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_n$，则偶(p,q)可用 2-部单图来实现的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}\min\{p_i,\ k\}\geqslant\sum_{j=1}^{k}q_j \qquad 1\leqslant k\leqslant n$$

11.5.1 证明：在定理 11.8 的证明中，网络 N 具有可

行流的充要条件是N'具有使截$(Y,\{y\})$的每条弧均饱和的流。

证：$\Leftarrow$：设f'是N'中使截$(Y,\{y\})$的每条弧都饱和的流。则f'满足：

$$
\begin{aligned}
&0\leqslant f'((x,x_i))\leqslant\sigma(x_i) && \forall x_i\in X\\
&f'((y_j,y))=\partial(y_j) && \forall y_j\in Y\\
&0\leqslant f'(a)\leqslant c(a) && \forall N \text{ 中的弧 } a\\
&f'^-(v)=f'^+(v) && \forall v\in V(N)。
\end{aligned}
$$

我们将f'限制在N上，记为f，则易知f满足容量约束条件与守恒条件，且对任意的$x_i\in X$，$y_j\in Y$，有：

$$0=f'^+(x_i)-f'^-(x_i)=f^+(x_i)-f^-(x_i)-f'((x,x_i))\geqslant f^+(x_i)-f^-(x_i)-\sigma(x_i)$$

故 $f^+(x_i)-f^-(x_i)\leqslant\sigma(x_i)$

又 $0=f'^-(y_j)-f'^+(y_j)=f^-(y_j)-f^+(y_j)-f'((y_j,y))=f^-(y_j)-f^+(y_j)-\partial(y_j)$

故 $f^-(y_j)-f^+(y_j)=\partial(y_j)$，所以$f$是$N$上的可行流。

$\Rightarrow$：若N存在可行流，我们考虑$\mathrm{val}f$最小的可行流f。且不妨设，f对N的任一有向圈，在圈中总有弧a，使$f(a)=0$。因为，否则可将有向圈上所有弧a的$f(a)$同减去其中最小数，这样得到的流f^*，也有$\mathrm{val}f=\mathrm{val}f^*$，故$f^*$仍是有最小流值的可行流。用$f^*$代$f$继续这过程，由于$N$上的圈是有限的，每进行一次相当于破一次圈，有限次后便可得所假定的流。

上述f一定满足：$f^-(y_j)-f^+(y_j)=\partial(y_j)$。否则，有$j_0$使$f^-(y_{j_0})-f^+(y_{j_0})-\partial(y_{j_0})>0$，因而$f^-(y_{j_0})>0$，

即 y_{j_0} 点有入弧 $a_1=(v_1, y_{j_0})$ 使 $f(a_1)>0$，若 v_1 是 N 的某个中间点或另一 y_j，则由守恒条件或 $f^-(y_j)-f^+(y_j)\geqslant\partial(y_j)$ 可知，v_1 点有入弧 $a_2=(v_2, v_1)$ 使 $f(a_2)>0$，因为 f 在 N 中不存在有向圈使其上的 $f(a)$ 均大于 0，故 v_2 必不同于 y_{j_0} 或 v_1，如此下去，只有到某个 $a_k=(v_k, v_{k-1})$，v_k 是某个 x_i 时，这一过程才可能终止。于是我们得到一条从 x_i 到 y_{j_0} 的有向路。其上的每一弧 a_i 均有 $f(a_i)>0$，显然将此有向路上的所有 $f(a_i)$ 同减去 $\min\{\partial, f(a_i), (i=1, 2, \cdots, k)\}$，得到的仍然是 N 中的可行流记为 $\bar{f}$，且 $\text{val}\bar{f}<\text{val}f$，这与 f 是最小流值的可行流相矛盾！故 f 满足：

$$f^-(y_j)-f^+(y_j)=\partial(y_j)\quad \forall y_j\in Y$$

由这一 f，我们构作 N' 中的流 f' 如下：

$$f'(a)=f(a)\qquad \forall a\in N;$$

$$f'((x, x_i))=f^+(x_i)-f^-(x_i)\quad \forall x_i\in X;$$

$$f'((y_j, y))=f^-(y_j)-f^+(y_j)=\partial(y_j)\quad \forall y_j\in Y.$$

容易验证，f' 是满足容量约束条件与守恒条件，且使截 $(Y, \{y\})$ 中的一切弧均饱和的 N' 中的流。

11.5.2 设 $\mathbf{p}=(5, 4, 4, 2, 1)$，$\mathbf{q}=(5, 4, 4, 2, 1)$，证明偶 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 不能由 2-部单图来实现。

证：若能实现，当 $k=3$ 时，由定理 11.9 应有

$$\sum_{i=1}^{5}\min\left\{p_i,\ 3\right\}\geqslant\sum_{j=1}^{3}q_j$$

但 $\sum\limits_{i=1}^{5}\min\left\{p_i,\ 3\right\}=3+3+3+2+1=12$，$\sum\limits_{j=1}^{3}q_j=5+4+4=13$。

这与上式矛盾。故偶(p,q)不可能由2-部单图来实现。

11.5.3 给定两个序列 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，求在顶点集$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$上存在有向图 D 使得

(i) $d^-(v_i)=p_i$，$d^+(v_i)=q_i$，$1\leqslant i\leqslant n$；

(ii) D 的邻接矩阵是(0,1)-矩阵，

成立的充要条件。

解：不妨设序列 p,q 中一个是非增序列，比如，$q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_n$；这时可以证明存在满足本题条件的有向图 D 的充要条件是序列 p,q 满足：

(1) $\sum_{i=1}^{n} p_i=\sum_{j=1}^{n} q_j$ ，

(2) $q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_n$时，$\sum_{i=1}^{n}\min(p_i,k)\geqslant\sum_{j=1}^{k} q_j$，$(1\leqslant k\leqslant n)$

⇒：若D是满足本题条件的有向图，由条件(i)及练习10.1.2知(1)成立。从D我们构作一个2-部图G，G的顶点分划为$(\{u_1,u_2,\cdots,u_n\},\{u'_1,\cdots,u'_n\})$，$G$中存在边$u_iu'_j$当且仅当$D$中存在$(v_j,v_i)$弧。于是由条件(i)知，$d_G(u_i)=p_i$，$d_G(u'_i)=q_i$，$(i=1,\cdots,n)$；又由条件(ii)知，$D$中无重弧，每一顶点$v_i$至多有一环，从而$G$是2-部单图，且$G$是偶(p,q)的2-部单图实现。由定理11.9知，(2)成立。

⇐：注意到证明必要性的过程是可逆的，从而知，当p，q满足条件(1)、(2)时，存在满足题目条件(i)、(ii)的有向图D。

11.5.4 设$\mathbf{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$和$\mathbf{q}=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$是非负整数的两个非增序列，分别用$\mathbf{p}'$和$\mathbf{q}'$来记序列$(p_2, p_3, \cdots, p_m)$和$(q_1-1, q_2-1, \cdots, q_{p_1}-1, q_{p_1+1}, \cdots, q_n)$。

(*a*) 证明$(\mathbf{p}, \mathbf{q})$可由2-部单图来实现的充要条件是$(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$可由2-部单图来实现。

(*b*) 利用(*a*)描述一个算法，来构作偶$(\mathbf{p}, \mathbf{q})$的一个2-部单图实现，如果这种实现存在的话。

证：本题的证明和算法，类似于练习1.5.7中的证明和算法，故从略。

11.5.5 一个$(m+n)$-正则图G是(m, n)-可定向的，是指它可以被定向使得每个顶点的入度是m或n。

(*a*) 证明：G是(m, n)-可定向的充要条件是存在V的一个分划$(V_1; V_2)$，对$\forall S\subseteq V$有$|(m-n)(|V_1\cap S|-|V_2\cap S|)|\leqslant |[S, \bar{S}]|$。

(*b*) 推导：若G是(m, n)-可定向的，且$m>n$，则G也是$(m-1, n+1)$-可定向的。

证：(*a*) $\Rightarrow$：设D是G的(m, n)-可定向，我们把D中入度为m的顶点的集合取为V_1，入度为n的顶点集合取为V_2，(V_1, V_2)是V的一个分划。对每个$S\subseteq V$；令：

A_S^-是S中顶点的全部入弧所成的集合；

A_S^+是S中顶点的全部出弧所成的集合。则有：

$$(S, \bar{S})\cup(\bar{S}, S)=A_S^-\Delta A_S^+=(A_S^-\cup A_S^+)\setminus(A_S^-\cap A_S^+)$$

故
$$\begin{aligned}|[S, \bar{S}]| &= |(S, \bar{S})\cup(\bar{S}, S)|\\ &= |A_S^-\cup A_S^+|-|A_S^-\cap A_S^+|\\ &= |A_S^-|+|A_S^+|-2|A_S^-\cap A_S^+|\end{aligned}$$

又由于 $|A_S^-\cap A_S^+|\leqslant\min(|A_S^+|,\ |A_S^-|)$

则

$$|[S,\ \bar{S}]|\geqslant\begin{cases}|A_S^-|-|A_S^+| & (当\ |A_S^-|\geqslant A_S^+|)\\ |A_S^+|-|A_S^-| & (当\ |A_S^+|\geqslant|A_S|)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&=||A^-|-|A^+||\\&=|(m|V_1\cap S|+n|V_2\cap S|)\\&\quad-(n|V_1\cap S|+m|V_2\cap S|)|\\&=|(m-n)(|V_1\cap S|-|V_2\cap S|)|\end{aligned}$$

$\Leftarrow$：设G是满足条件的$(m+n)$-正则图。分两种情况：

(1) 若$m=n$，则G每个连通分支是Euler图，按每个分支的Euler圈的前进方向定向，对每个点都有m条入弧，故G是$(m,\ n)$-可定向。

(2) 若$m\neq n$；当取$S=V$，可得：

$$0\leqslant|(m-n)(|V_1|-|V_2|)|\leqslant 0,故\ |V_1|=|V_2|$$

我们在G的相伴有向图D(见练习10.3.6)上，构作网络N使得：D上的每条弧的容量为1，N的源集$X=V_1$，汇集$Y=V_2$，且每个源x_i上的供应$\sigma(x_i)$，每个汇y_j上的需求$\partial(y_j)$均为$|m-n|$。于是由条件知，对任意$S\subseteq V$有：

$$\begin{aligned}c(S,\ \bar{S})&=|[S,\ \bar{S}]_D|=|[\bar{S},\ S]_G|\\&\geqslant|(m-n)(|V_1\cap S|-|V_2\cap S|)|\\&=|m-n||(|V_1\cap\bar{S}|-|V_2\cap\bar{S}|)|\\&\geqslant|m-n||V_2\cap\bar{S}|-|m-n||V_1\cap\bar{S}|\\&=\partial(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap\bar{S})\end{aligned}$$

依定理11.8，网络N存在可行流，与练习11.5.1的必要性证明一样，可得：N中存在流值最小的可行流f，使对一切$y_j\in Y$满足。

$$f^-(y_j)-f^+(y_j)=\partial(y_j)=|m-n|$$

且 $\operatorname{Val} f=f^+(X)-f^-(x)=f^-(Y)-f^+(Y)$

$$=\partial(Y)=|m-n|\ |V_2|$$

又由 $|V_1|=|V_2|$，故 $f^+(X)-f^-(X)=\sum_{x_i\in X}(f^+(x_i)-f^-(x_i))=|m-n|\ |V_1|$，从而对一切 $x_i\in X$，$f^+(x_i)-f^-(x_i)=|m-n|=\sigma(x_i)$。

与练习11.5.1一样，还可得到最小值流的可行流 f，满足：对 N 中任一有向圈，在圈中总有弧 a，使 $f(a)=0$；于是，D 中端点相同方向相反的两条弧，有一个是 f-零的。换言之，这两弧至多有一条饱和。

今由流 f 的一切饱和弧导出 G 的一个子图 H 的一个定向。由上知，这个定向下 H 中 x_i 点的出弧比入弧多 $|m-n|$ 条，y_j 点的入弧比出弧多 $|m-n|$ 条。余下 $G-E(H)$ 中的边尚未定向，我们可证 $G'=G-E(H)$ 的每个分支是Euler图。因为在 G' 中，有：

$$\begin{aligned}
d'_G(x_i)&=(m+n)-(f^+(x_i)+f^-(x_i))\\
&=(m+n)-(f^+(x_i)-f^-(x_i))-2f^-(x_i)\\
&=(m+n)-|m-n|-2f^-(x_i)\\
&=\begin{cases}2(n-f^-(x_i)) & \text{当}m\geqslant n\\ 2(m-f^-(x_i)) & \text{当}m<n\end{cases}\\
&=\text{偶数}
\end{aligned}$$

同理： $d_G(y_j)=$偶数

故 G' 上有个Euler型定向，它与 H 的上述定向一起构成了 G 上的一个 (m,n)-可定向。

(b) 若 G 是 (m,n)-可定向，并且 $m>n$，则由(a)知，存

在分划(V_1, V_2)，对每个$S\subseteq V$都有：

$$|(m-n-2)(|V_1\cap S|-|V_2\cap S|)|\leqslant|(m-n)(|V_1\cap S|-|V_2\cap S|)|\leqslant|[S, \bar{S}]|.$$

再由(a)知，G是$(m-1, n+1)$-可定向的。

第十二章　圈空间和键空间

12.1　环流和势差

定义：设 D 为有向图，定义在 A 上的实值函数 f，若对任意的 $v\in V$，均满足守恒条件 $f^-(v)=f^+(v)$，则称 f 为 A 上的**环流**。以环流 f 为空间的点，实数域 R 为系数域，所生成的矢量空间记为 $\mathscr{C}$，称为**圈空间**。

定义：设 D 为有向图，定义在 V 上的实值函数 p，若 $a=(x,\ y)\in A$，定义函数 $\delta p(a)=p(x)-p(y)$。今在 A 上的函数 g，若存在 V 上的某个 p，使 $g=\delta(p)$，则称 g 为 D 中的**势差**。以势差 g 为空间的点，实数域 R 为系数域，所生成的矢量空间记为 $\mathscr{B}$，称为**键空间**。

定理12.1　设 M 是有向图 D 的关联矩阵，则 $\mathscr{B}$ 是 M 的行空间，而 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{B}$ 的正交补空间。

定义：定义在 A 上的函数 f，称 $\|f\|=\{a|f(a)\neq 0, a\in A\}$ 为 f 的**台**。

引理12.2.1　若 f 是非空环流，则 $\|f\|$ 含有圈。

引理12.2.2　若 g 是非零势差，则 $\|g\|$ 含有键。

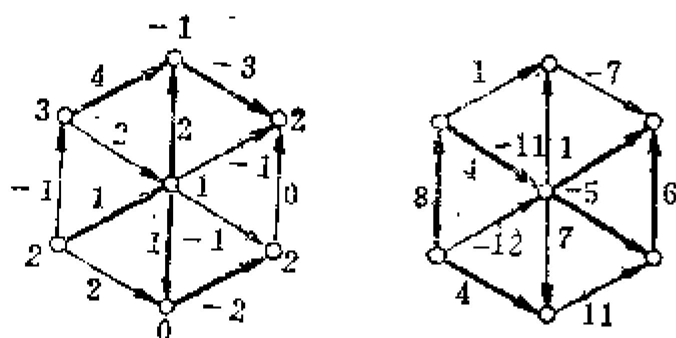
定理12.2　设 B 和 C 分别为 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的基矩阵，则对任一 $S\subseteq A$，有：

(i) $B|S$ 的列向量线性独立的充要条件是 S 不含圈；

(ii) $C|S$ 的列向量线性独立的充要条件是 S 不含键。

系12.2 $\mathscr{B}$和$\mathscr{C}$的维数是 $\dim\mathscr{B}=\nu-\omega$；$\dim\mathscr{C}=\varepsilon-\nu+\omega$

12.1.1 (*a*)将下列图(1)中生成树(粗边)上标出的函数和图(2)中余树(粗边)上标出的函数，分别扩充成图(1)的势差和图(2)的环流。



12.1.1 图

(*b*)令 f，g，T 分别为 D 中的环流、势差和生成树。证明：f 被 $f|T$ 唯一确定；g 被 $g|T$ 唯一确定。

证：(*a*) 易验证图中所标明的函数是所求的势差和环流。

(*b*)设C是对应 T 的一个$\mathscr{C}$的基矩阵，显然按 C的定义，对$\mathscr{C}$中任一 f，它可由 C 中的行向量的线性组合来唯一表示：事实上，若用 C 的行向量簇$\{f_e\}$作$\mathscr{C}$的基时，f 的坐标恰是 $f|T$。从而 f 由$f|T$ 唯一确定。类似地设B是对应T的一个$\mathscr{B}$的基矩阵，显然按 B 的定义，对$\mathscr{B}$中任一 g 可由 B 中行向量的线性组合来表示，若用 B 的行向量簇$\{g_e\}$作$\mathscr{B}$的基时，g 的坐标恰是 $g|T$。从而 g 亦由 $g|T$ 唯一确定。

12.1.2 (*a*) 令 B 和 C 分别是$\mathscr{B}$和$\mathscr{C}$的基矩阵。T 是

D的任一棵生成树[注1]，证明：B由$B|T$，C由$C|T$唯一确定。

(b) 令T和T_1是D中两棵给定的生成树[注1]，B和B_1分别表示$\mathscr{B}$的对应于T和T_1的基矩阵；C和C_1分别表示$\mathscr{C}$的对应于T和T_1的基矩阵，证明：$B=(B|T_1)B_1$和$C=(C|T_1)C_1$[注2]

[注1] D不一定要求连通，只需在证明中将T相应地换成生成森林，结论同样成立。

[注2] 可不必要求B，C是对应于某个树T的基矩阵。

证：(a) 由练习12.1.1(b)知，B中的任一行向量g由$g|T$唯一确定。从而B由$B|T$唯一确定。完全类似地可证，C由$C|T$唯一确定。

(b) 由于B，B_1均是$\mathscr{B}$的基矩阵，故它们的秩相等。于是，存在满秩方阵A使$B=AB_1$，从而$(B|T_1)=A(B_1|T_1)$。由于B_1是$\mathscr{B}$的对应于T_1的基矩阵，故$B_1|T_1$是单位方阵，于是，$A=(B|T_1)$，$B=(B|T_1)B_1$。

类似可证，$C=(C|T_1)C_1$。

12.1.3 设K是由连通有向图D的关联矩阵M中删去任一行得到的矩阵，证明K是$\mathscr{B}$的基矩阵。

证：设M的行向量为β_1，$\beta_2\cdots$，β_ν，显然$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu=0$。若命题不成立，不失一般性假定$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots$，$\beta_{\nu-1}$线性相关，即存在不全为零的数$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{\nu-1}$，不妨假定$a_1=-1$，成立$\beta_1=a_2\beta_2+\cdots+a_{\nu-1}\beta_{\nu-1}$。从而有$0=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu=(a_2+1)\beta_2+\cdots+(a_{\nu-1}+1)\beta_{\nu-1}+\beta_\nu$，故$\beta_2$，$\beta_3$，$\cdots$，$\beta_\nu$之间亦线性相关，所以$\beta_1,\beta_2,\cdots$，$\beta_\nu$的生成空间的维数$\leqslant\nu-2$，由定理12.1知$\dim\mathscr{B}\leqslant$

$\nu-2$。但另一方面 D 连通，由系 12.2知 $\dim\mathscr{B}=\nu-1$，矛盾。所以 M 中的任意 $\nu-1$ 个向量均是线性独立的，可以作为 $\mathscr{B}$ 的基，所以 K 是 $\mathscr{B}$ 的基矩阵。

12.1.4 证明若 G 是平面图，则 $\mathscr{B}(G)\cong\mathscr{C}(G^*)$，$\mathscr{C}(G)\cong\mathscr{B}(G^*)$。[注]

[注]这里 $\mathscr{B}(G)$，$\mathscr{C}(G)$，$\mathscr{B}(G^*)$，$\mathscr{C}(G^*)$ 应分别理解为 $\mathscr{B}(\overrightarrow{G})$，$\mathscr{C}(\overrightarrow{G})$，$\mathscr{B}(\overrightarrow{G^*})$，$\mathscr{C}(\overrightarrow{G^*})$，其中 $\overrightarrow{G}$ 是 G、$\overrightarrow{G^*}$ 是 G^* 的任一个确定的定向。

证：由对偶图的定义有 $\nu^*=\phi$，$\varepsilon^*=\varepsilon$，$\omega^*=1$。又由推广的 Euler 公式，$\nu-\varepsilon+\phi=\omega+1$。于是由系 12.2 有：$\dim\mathscr{B}(G)=\nu-\omega=\varepsilon^*-\nu^*+\omega^*=\dim\mathscr{C}(G^*)$，$\dim\mathscr{C}(G)=\varepsilon-\nu+\omega=\nu^*-\omega^*=\dim\mathscr{B}(G^*)$。又因为有限维线性空间同构的充要条件是它们维数相等。故结论成立。

12.1.5 D 在域 F 上的一个环流是指在 F 中满足：$f^+(v)=f^-(v)$，$\forall v\in V$ 的一个函数 f：$A\to F$；F 上的势差可类似定义。这些势差和环流所决定的矢量空间分别记为 $\mathscr{B}_F$、$\mathscr{C}_F$。证明分别用 $\mathscr{B}_F$，$\mathscr{C}_F$ 来代替 $\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 定理 12.2仍然成立。

证：在书"Craph Theory with Applications"中对 f_c，g_B，引理 12.2.1，引理 12.2.2，定理 12.2 的叙述和证明是在实数域 R 上进行的，在那里仅用到域的一般性质，而没有用到它的特殊性质，故可以完全平行地逐字逐句地将 f_c、g_B，引理 12.2.1，引理 12.2.2，以及定理 12.2的叙述和证明换成对域 F 上来叙述。我们将叙述过程中的"1"看成 F 上的么元素，"－1"看成负么元素，"0"看成 F 中的零元

素，线性独立和线性相关的概念亦将它定义在系数域为 F 上来理解，则毫无困难地证明对 $\mathscr{B}_F$、$\mathscr{C}_F$，定理 12.2 仍成立。详细叙述从略。

12.1.5 证明 ν 个顶点，$\nu-1$ 条边的单图 G 是一棵树的充要条件是 $\dim\mathscr{B}(G)=\nu-1$。

证：$\Longrightarrow$：由系 12.2，结论显然。

$\Longleftarrow$：同样由系 12.2 知，$\omega(G)=1$，即 G 连通。于是由练习 2.1.5 知，G 是树。

12.2 生成树的数目

定义：若矩阵 A 的一切满阶子方阵的行列式值均为 0，1 或 -1，则称 A 是单模的。

定理12.3 $\mathscr{B}$ 的对应于树 T 的基矩阵 B 是单模的。

定理12.4 $\tau(G)=\det BB'$，这里 B 是任意 $\mathscr{B}$ 的单模基矩阵。

系12.4 $\tau(G)=\pm\det\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$ 这里 B，C 分别是任意的 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的单模基矩阵。

矩阵-树定理：$\tau(G)=\det KK'$，其中 K 是由 G 的任一定向的关联矩阵 M 删去任一行得到的矩阵。

12.2.1 证明：

(a) 从关联矩阵 M 中删去任意一行得到的矩阵 K 是单模的；

(b) $\tau(G)=\pm\det\begin{bmatrix}K\\C\end{bmatrix}$〔注〕

〔注〕这里 C 应理解为$\mathscr{C}$的单模基矩阵，否则本式不一定成立。

证：(a)事实上我们可以证明更强的命题：M 中的任意子方阵 P 的行列式值恒等于 0，1 或 -1。对 P 的阶数 n 用归纳法，当 $n=1$ 时，由 M 的定义显然成立。若 $n\leqslant k$ 时命题均已成立，今考虑 $k+1$ 阶的 M 的子方阵 P，若 P 中所有的列向量均含两个非零元素，则我们将 P 中所有行向量相加时，它变成零向量，所以 $\det P=0$；不然 P 中至少有一列最多仅有一个非零元素 p_{ij}，将 $\det P$ 按这一列进行行列式展开，于是 $\det P=(-1)^{i+j}p_{ij}\det P^*_{ij}$，这里 $\det P^*_{ij}$ 是 P 的 k 阶余子式，按归纳法假定 $\det P^*_{ij}$，取值为 0，1 或 -1，所以 $\det P$ 也取值 0，1 或 -1，所以由归纳法知命题成立。

(b)由练习12.1.3知 K 是$\mathscr{B}$的基矩阵，故由(a)及类似于定理12.4的证明，有 $\tau(G)=\det KK'$，又因 C 是单模的，类似于定理12.4的证明，还有 $\tau(G)=\det CC'$。$\mathscr{B}$ 和$\mathscr{C}$由定理12.1是正交的。从而有$KC'=CK'=0$。于是有 $\tau^2(G)=$

$$\det KK'\cdot\det CC'=\det\begin{bmatrix}KK' & 0\\ 0 & CC'\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}KK' & KC'\\ CK' & CC'\end{bmatrix}$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}K\\ C\end{bmatrix}[K'C']\right)=\det\begin{bmatrix}K\\ C\end{bmatrix}\det[K'C']$$

$$=\left(\det\begin{bmatrix}K\\ C\end{bmatrix}\right)^2，所以\tau(G)=\pm\det\begin{bmatrix}K\\ C\end{bmatrix}.$$

12.2.2 无环图 G 的传导矩阵 $C=[C_{ij}]$是如下的一个

$\nu\times\nu$ 矩阵，其中$C_{ii}=\sum_{i\neq j}a_{ij}$，$c_{ij}=-a_{ij}$(当$i\neq j$)，$A=[a_{ij}]$是 G 的邻接矩阵。证明：(a)$C=MM'$，其中 M 是 G 的任一定向的关联矩阵；

(b) C 的所有代数余子式均等于 $\tau(G)$。

证：(a)由于 G 无环，故按定义 C_{ii} 恰表示顶点 v_i 的度。另一方面不管 G 如何定向，$MM'=[b_{ij}]$，b_{ii} 的值按定义也恰为 v_i 的度，故$C_{ii}=b_{ii}$，当 $i\neq j$ 时，b_{ij} 按定义恰为 v_i，v_j 之间连的边数的负值，即$b_{ij}=-a_{ij}=c_{ij}$，故$C=MM'$。

(b)设 C 之行向量为 C_1，C_2，…，C_ν，按 C 的定义易验证 $C_1+C_2+\cdots+C_\nu=0$，故由行列式的性质易证 $A_{ij}=A_{1j}$，这里 A_{ij} 是 C 的 c_{ij}的代数余子式，由于 A 是对称矩阵，故 C 亦是对称矩阵，所以亦有 $A_{ij}=A_{ii}$，故对任意的 i，j，有 $A_{ij}=A_{11}$。又设 K_1 是 M 中划去第一行之矩阵，于是 $MM'=\begin{bmatrix}C_1\\K_1\end{bmatrix}[C'_1K'_1]=\begin{bmatrix}C_1C'_1 & C_1K'_1\\K_1C'_1 & K_1K'_1\end{bmatrix}$由于$[C_1C'_1]$是 1×1 矩阵，故由(a)知 $A_{11}=\det(K_1K'_1)$，由练习12.2.1(b)的证明知，$A_{11}=\tau(G)$。从而对任定 i，j 均有 $A_{ij}=\tau(G)$。

12.2.3 若矩阵的所有子方阵，其行列式值均为 0，1 或 −1，则称矩阵是全单模的。

证明：

(a)$\mathscr{B}$和$\mathscr{C}$对应于树[注]的基矩阵均是全单模的。

(b)单图 G 的关联矩阵是全单模的充要条件是 G 为2-部图。

〔注〕 这里树的假定，可换成生成森林。事实上，以两个分支的有向图 D 为例，在这两分支间任意加入一条弧 e 使其连通，所得之图记为 D_1。设 T 为 D 中生成森林，则 $T+e=T_1$ 是 D_1 的生成树。设 B，C 分别为对应于 T 的基矩阵，B_1，C_1 分别为对应于 T_1 的基矩阵，于是由这些基矩阵的定义，B，C 分别是 B_1，C_1 的子矩阵，由于 B_1，C_1 是全单模矩阵，推之 B，C 也是全单模矩阵。

证：(a)设$\mathscr{B}$与$\mathscr{C}$对应于树T的基矩阵为B和C，则$B|T=I$，$C|T=I$。

下面只对B证明命题成立，对C的证明完全类似。

将单位矩阵$B|T$放在B的前$\nu-1$列。对子方阵的阶数k作归纳。因B中只含0，±1这些元素，故$k=1$成立。假设$k\leqslant l$的一切k阶子方阵P_k的行列式$\det P_k=0$，±1，特别$\det P_l=0$，±1。

设P_{l+1}是B的任一$l+1$阶子方阵，且取自B中的$i_1, i_2, \cdots, i_{l+1}$行，$j_1$，$j_2$，…，$j_{l+1}$列，不妨设$j_1<j_2<\cdots<j_{l+1}$。

(1) 若$j_1\leqslant\nu-1$，这时P_{l+1}中的j_1列除0外至多有一个1。故$\det P_{l+1}=0$或按j_1列展开得$\det P_{l+1}=\pm\det P_l$，由假设它为0，±1。

(2) 若$j_1>\nu-1$，这时再取i_1，i_2，…，i_{l+1}行外的其它所有行i_{l+2}，…，$i_{\nu-1}$行与i_{l+2}，…，$i_{\nu-1}$列，组成$(\nu-1)-(l+1)$阶子方阵J，它经行、列自身的适当置换是一单位矩阵，于是，可知B中的j_1，j_2，…，j_l，j_{l+1}…，$i_{\nu-1}$列组成了B中的一个满阶子方阵P。它与P_{l+1}有如下关系：

$$P=\begin{bmatrix} P_{l+1} & 0 \\ P_{(\nu-1)-(l+1),l+1} & J \end{bmatrix}$$

故$\det P_{l+1}=\pm\det P$。由定理12.3知$\det P=0$，±1，所以$\det P_{l+1}=0$，±1。由归纳法知，B是全单模的。

(b) $\Longrightarrow$，若单图G的关联矩阵M是全单模的，但G不是2-部图，由定理1.2，G中含有奇圈，设C是G中长度为最小的奇圈，因为任一奇圈上的非相邻点间有边相连时，必然要产生更小的奇圈，故C上非相邻点均无边相连。设C为$v_1e_1v_2e_2\cdots v_ke_kv_1$，$k$为奇数，于是适当地对$G$的顶点和边编号$v_1$，$v_2$，$\cdots$，$v_k$；$e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_k$在$M$中对应的子方阵的行列式必为如下形式：

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & 0 & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{k+1}\begin{vmatrix} & & & & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix}=2$$

这与M是全单模相矛盾。故G是2-部图。

$\Longleftarrow$，设G是2-部单图。今对G的关联矩阵M中子方阵的阶k进行归纳。当$k=1$时，由M的定义，结论成立。若对$k\leqslant l$，M中的任意k阶子方阵对应的行列式之值均为0，1或-1，今考虑M中的$l+1$阶子方阵M_1，若M_1中某一列仅一个非零元素，则将$\det M_1$按这一列展开，并由归纳法假设，得$\det M_1=0$，1或-1；若M_1的任一列均有两个非零元素，

由于 G 是 2-部图，设 G 的顶点分划为 $(X、Y)$，将 M_k 中对应于 X 中和 Y 中的行向量分别加起来，均得行向量 $(1,1,\cdots,1)$ 故 $\det M_k=0$。所以不论何种情况，$l+1$ 阶子方阵对应的行列式的值均为 0，1 或 -1，由归纳法得知 M 是全单模的。

12.2.4 设 F 是特征数为 p 的域，证明：

(a) 若 B，C 分别是 $\mathscr{B}_F$，$\mathscr{C}_F$ 对应于树的基矩阵，则

$$\det\begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix}=\tau(G)(\mathrm{mod}\,p).$$

(b) $\dim(\mathscr{B}_F\cap\mathscr{C}_F)>0$ 的充要条件是 $p|\tau(G)$。

(H. Shank)

证：(a) 对定理12.2，练习12.1.2，定理12.3，定理12.4以及系12.4的叙述及证明，把其中的"1"看成 F 上的么元，"-1"看成 F 上的负么元，"0"看成 F 的零元，，线性相关概念亦相应地换成域 F 上的叙述，于是自然地行列式的值W换成了 $W(\mathrm{mod}\,p)$，不难仔细检查上述定理，练习等在 F 域上叙述的结论仍成立。故(a)成立。详细叙述这里从略。

(b)因为 $\dim(\mathscr{B}_F\cap\mathscr{C}_F)>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix}$ 的行向量线性相关

$$\Leftrightarrow\det\begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix}\overset{\text{由(a)}}{=\!=\!=}\tau(G)(\mathrm{mod}\,p)\equiv0(\mathrm{mod}\,p)\Leftrightarrow$$

$p|\tau(G)$。

12.3 完美正方形

定义：整方矩形是一个被分割成有限个(至少有两个)正

方形的矩形。若其组成正方形的面积互不相同，则称为完美矩形。

定义： 整方矩形R的**相伴有向图**是如下构作的一个有向图D。R的每条水平分割线段对应D的一个顶点，D的两个顶点v_i，v_j连接有弧(v_i, v_j)当且仅当它们对应的水平分割线段H_i，H_j分别含某一组成正方形的上下两边。对应于R的上边和下边的顶点称为D的**极**。

由D的底图G与D的极x、y，作成图的$G+xy$称为R的**水平图**。

定理： 设D是整方矩形R的相伴有向图。将D每条弧a看作电阻为1的导线。$g(a)$表示在a上的电流，σ是离开x的总电流。K是D的关联矩阵删去对应于y的一行。C是D的圈空间$\mathscr{C}$对应于树T的基矩阵。则有

$$\begin{bmatrix}K\\C\end{bmatrix}g'=\begin{bmatrix}\sigma\\0\end{bmatrix}$$

12.3.1 证明整方矩形中各组成正方形的边是可公度的。

证： 设D是整方矩形R的相伴有向图，x，y是D的极。对D的每个顶点v，确定一个势$p(v)$，它等于对应水平分割线段的高。D的每一弧看作电阻为1的导线，则势差$g=\delta p$确定了从x到y的一个电流。由上述定理知g满足：

$$\begin{bmatrix}K\\C\end{bmatrix}g'=\begin{bmatrix}\sigma\\0\end{bmatrix}$$

另一方面每个$g(a)$是a对应的组成正方形的边长，$\sigma=R$的铅直线边长。由K，C的元素是0，±1及练习 12.2.1 (b)

中 $\det\begin{bmatrix}K\\C\end{bmatrix}=\pm\tau(G)$(整数)，故 $\begin{bmatrix}K\\C\end{bmatrix}^{-1}$ 中元素均是有理数。于是由

$$g'=\begin{bmatrix}K\\C\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sigma\\0\end{bmatrix}$$

知，$g(a)=\sigma[r(a)/q(a)]$，其中既约分数 $r(a)/q(a)$ 是 $\begin{bmatrix}K\\C\end{bmatrix}^{-1}$ 中第一列对应于 a 的分量。令 s 是一切 $q(a)$ 的最大公倍数，则有：$g(a)=\frac{\sigma}{s}m(a)$，这里 $m(a)=r(a)[s/q(a)]$ 整数，即各个组成正方形的边可以用 σ/s 公度。

12.3.2 整方矩形 R 的铅直图是将 R 旋转一个直角得到的整方矩形的水平图。若 R 中没有由四个组成正方形的隅角交成的点，证明 R 的水平图与铅直图是对偶的。

证： 由 R 水平图的定义知，它是平面图，其顶点与 R 的水平分割线段对应，它的边与 R 的组成正方形对应。xy 边与 R 的外面无界矩形对应。

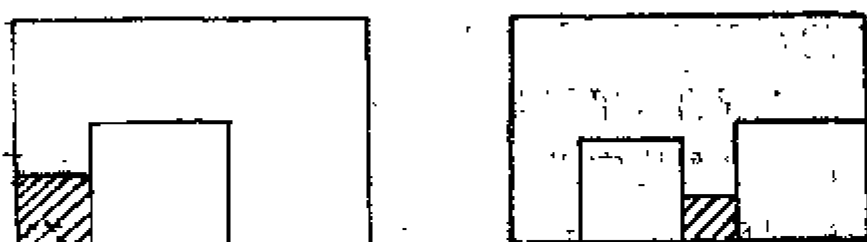
R 的铅直图是 R 旋转 $90°$ 的水平图。故 R 的铅直分割线段对应于铅直图的顶点，铅直图的边仍与 R 的组成正方形对应。R 的左右铅直线对应铅直图的顶点 x'，y'，且 $x'y'$ 边仍与 R 的外面无界矩形对应。

当 R 没有四个组成正方形的隅角交点时，它只有不超过两个隅角的交点。对这样的 R，可知其铅直线与其水平面图的面一一对应(注意，过有四个隅角交点的铅直线与水平图的面对应不是一一的)。故满足题目条件的铅直图的一个顶点与水平图的一个面对应。由于它们的边都与 R 的组成正方

形对应，且当且仅当水平图中两个面被一边分隔时，R的对应两条铅直线是该边对应的组成正方形的左右铅直线，于是在铅直图中R的这两条铅直线的对应顶点有边相连。于是由对偶图的定义，命题成立。

12.3.3　完美立方体是能剖分为有限个(最少两个)较小立方体的一种立方体，且其中任两个小的组成立方体的体积都不相同。证明不存在完美立方体。

证：首先注意到在任何一个完美矩形中，最小的组成正方形不会在周界上。若在周界上，如图所示带阴影的正方形表示最小组成正方形。则这个最小组成正方形上方的组成正方形只能是比最小组成正方形的边长更短的正方形，矛盾。



12.3.3　图

今假定存在某一个完美立方体记为C，为了叙述方便，将C放在空间直角坐标系的第一卦限里，C的三个面和三个坐标面重合。令R_1是C在XY平面上的底，C中落在R_1上的小立方体元素"诱导"出R_1上一个完美方形的剖分，设S_1是R_1这完美方形中最小的组成正方形，由上面的证明，S_1不可能位于R_1的周界上。令C_1是S_1对应在C中的组成立方体，显然由完美立方体的定义，一面落在R_1上C中围绕C_1四周的组成立方体均比C_1高。因此用$z=C_1$的高这平面去截C时，

C_1在这平面上的截口正方形记为R_2，显然C落在R_2上的小立方体元素"诱导"出R_2上的一个完美方形，记S_2是R_2这完美方形中最小组成正方形，C_2是S_2对应在C中的组成立方体，如此象R_1到R_2，S_1到S_2，C_1到C_2的过程可一直进行下去，得到C中组成立方体的元素序列C_n，且从体积角度来看$C_{n+1}<C_n$。这与C是剖分成有限个立方体的定义相矛盾。故不存在完美立方体。